Kapitola 2

Lineární programování

V této kapitole se seznámíme se základní metodou lineárního programování, tzv. *simplexovým algoritmem.* Při výkladu budeme klást důraz na geometrickou interpretaci, což umožní snazší pochopení principu, na kterém je metoda založena. Poznamenejme ještě, že název lineární programování vznikl jako název metody pro řešení jistého typu lineárních optimalizačních úloh a nemá nic společného s pojmem programování počítačů.

2.1 Úloha lineárního programování

Příklad 1.1.2, který jsme uvedli v předchozí kapitole, je typickým příkladem úlohy lineárního programování. Zformulujme tento příklad obecně:

Úloha 2.1.1 Předpokládejme, že závod vyrábí n druhů výrobků $V_1, \dots, V_n$ z m druhů surovin $S_1, \dots, S_m$. Označme symbolem c_j cenu za jednotkové množství výrobku V_j, symbolem b_i zásobu suroviny S_i a konečně symbolem a_{ij} množství suroviny S_i spotřebované na výrobu jednotkového množství výrobku V_j, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$. Naším úkolem je určit, jaká vyrábět množství výrobků V_j z daných surovin S_i tak, aby celková cena vyrobených výrobků byla co největší.

Podobně jako v Příkladu 1.1.2 vyjádříme tuto úlohu matematicky. Označme symbolem x_j vyráběné množství výrobku V_j, $j = 1, \dots, n$. Naším úkolem je určit maximum funkce

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n,$$

pro $x_1, \dots x_n$ splňující podmínky

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{array}$$

Jinou úlohou lineárního programování je tzv. dopravní úloha:

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Úloha 2.1.2 Předpokládejme, že jisté zboží je ze skladišť $S_1, \dots, S_m$ třeba dopravit do prodejen $P_1, \dots, P_n$. Označme symbolem a_i zásobu tohoto zboží ve skladišti S_i a symbolem b_j požadavek prodejny P_j na toto zboží, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Předpokládejme, že hodnota všech zásob ve skladištích je stejná jako součet požadavků všech prodejen, tj.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Označme dále symbolem c_{ij} náklady na dopravu jednotkového množství zboží ze skladu S_i do prodejny P_j. Naším úkolem je určit, jaké množství zboží přepravovat ze skladu S_i, $i = 1, \dots, m$ do prodejny P_j, $j = 1, \dots, n$, tak, aby byly splněny požadavky všech prodejen a přitom náklady na dopravu byly co možná nejnižší.

Označíme-li symbolem x_{ij} množství zboží přepravované ze skladu S_i do prodejny P_j, pak lze tuto úlohu zapsat následovně:

Určete

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

pro x_{ij} splňující podmínky

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i,\ i = 1, \dots m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j,\ j = 1, \dots n \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \dots, m,&\ j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Stačí si totiž uvědomit, že podmínka $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ říká, že ze skladu S_i se odveze právě množství a_i. Podobně, podmínka $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ říká, že do prodejny P_j se doveze právě množství b_j.

Z předchozích příkladů vidíme, že úloha lineárního programování má lineární účelovou funkci a podmínky omezující jednotlivé proměnné jsou ve tvaru rovností nebo nerovností. V obou předchozích příkladech jsme požadovali, aby proměnné byly nezáporné. V obecné úloze lineárního programování, kterou budeme dále formulovat však tento požadavek být nemusí. Proměnnou x, o které nebudeme předpokládat, že je nezáporná, budeme pro zdůraznění nazývat *neomezenou.*

Dříve než zformulujeme obecnou úlohu, uveďme dva speciální typy úlohy lineárního programování, se kterými se setkáváme nejčastěji.

Definice 2.1.1 Úlohou lineárního programování v *kanonickém tvaru* nazýváme úlohu určit

$$\max(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) \quad (\text{ nebo } \quad \min(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n)),$$

pro $x_1, \dots x_n$ splňující podmínky

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0, \end{aligned}$$

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

kde $c_j, b_i, a_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$ jsou daná reálná čísla.

Stručně budeme předchozí úlohu zapisovat

$$\begin{gathered}
\max(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0,
\end{gathered}$$

nebo ve tvaru

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n.$$

Abychom zápis úlohy ještě více zjednodušili, budeme též používat maticového a vektorového zápisu a maticového násobení. Udělejme následující úmluvu platnou dále v celých skriptech:

Úmluva: Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ bude znamenat *sloupcový vektor*, tedy matici typu $(n, 1)$, a to zejména tehdy, bude-li vystupovat v maticovém násobení. Transponovaný vektor $\mathbf{x}^\top$ je pak řádkový vektor, tj. $\mathbf{x}^\top = (x_1, \dots, x_n)$. Skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ budeme pomocí maticového násobení zapisovat ve tvaru $\mathbf{x}^\top\mathbf{y}$. Tedy

$$\mathbf{x}^\top\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Pro dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ zápis $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ znamená, že uvedená nerovnost platí pro všechny souřadnice, tj.

$$x_j \le y_j, \quad \text{pro } j = 1, \dots, n.$$

Nulový vektor budeme označovat symbolem $\mathbf{0}$.

Nyní můžeme úlohu v kanonickém tvaru zapsat jednoduše jako:

$$\begin{gathered}
\max \mathbf{c}^\top\mathbf{x} \\
A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \ge \mathbf{0},
\end{gathered}$$

kde $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n), $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ a $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$.

Poznamenejme, že úloha formulovaná v Příkladu 1.1.2 a Úloha 2.1.1 jsou v kanonickém tvaru.

Definice 2.1.2 Úlohou lineárního programování ve *standardním tvaru* nazýváme úlohu

$$
\begin{gathered}
\max(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) \quad (\text{ nebo } \quad \min(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n)) \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.
\end{gathered}
$$

Maticový zápis úlohy ve standardním tvaru je

$$
\begin{gathered}
\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad (\text{ nebo } \quad \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x}) \\
A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.
\end{gathered}
$$

Úloha ve standardním tvaru má tedy všechna omezení, kromě omezení nezápornosti proměnných ve tvaru rovnosti. Všimněme si, že Úloha 2.1.2 byla formulována ve standardním tvaru.

Nyní zformulujeme obecnou úlohu lineárního programování. Jak již bylo řečeno, mohou se v ní objevovat podmínky ve tvaru rovností nebo nerovností, některé proměnné mohou být neomezené a můžeme hledat maximální nebo minimální hodnotu dané účelové funkce.

Definice 2.1.3 Nechť je dána matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n), dále vektory $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ a čísla k, r, s, $0 \leq k \leq n$ a $0 \leq r \leq s \leq m$. *Obecnou úlohou* lineárního programování rozumíme úlohu

$$
\begin{gathered}
\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (\text{ nebo } \quad \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ ) \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, \ldots, r \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \ i = r+1, \ldots, s \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = s+1, \ldots, m \\
x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, k \\
x_j \ \text{ neomezené } j = k+1, \ldots, n.
\end{gathered}
$$

Poznámka 2.1.1 Úloha v kanonickém tvaru je tedy obecná úloha pro $r = m$ a $k = n$, úloha ve standardním tvaru je obecná úloha pro $r = 0, \ s = 0$ a $k = n$.

V souladu s obecnou úlohou matematické optimalizace zavedenou v Kapitole 1, nazýváme funkci $z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ účelovou funkcí dané úlohy a množinu P bodů $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, které splňují podmínky z Definice 2.1.3, množinou přípustných řešení. Vektor $\mathbf{c}$ se někdy nazývá vektor cen a jeho souřadnice ceny. Bod optima funkce z, pokud existuje, nazýváme *optimálním řešením* dané úlohy. Maximální hodnotu účelové funkce z budeme označovat $z_{\max}$, minimální pak $z_{\min}$.

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Příklad 2.1.1 Obecnou úlohou lineárního programování je např. úloha

$$\left.\begin{array}{r} \min(3x_1 - x_2 + 2x_3) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = \ 5 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 \leq \ 1 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \ \text{neomezené.} \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Simplexová metoda, pomocí které se naučíme řešit obecnou úlohu lineárního programování, pracuje s úlohami ve standardním tvaru. Důvod je ten, že s rovnicemi se snáze zachází než s nerovnicemi. Nerovnice $x_j \geq 0$, které se standardní úloze vyskytují jsou natolik jednoduché, že jejich platnost snadno zajistíme. Proto se v další části tohoto odstavce naučíme převádět obecnou úlohu na standardní tvar. K tomu si ukážeme 3 dílčí úpravy:
1.Převádět hledání minima na maximum a naopak.
2.Nahradit neomezené proměnné nezápornými.
3.Nahradit podmínky ve tvaru nerovnic rovnicemi.

Převod minima na maximum:
Základem tohoto převodu je Věta 1.2.1, kterou jsme dokázali v předchozí kapitole. Podle této Věty např.

$$\min\{\mathbf{c}^\top\mathbf{x} :\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = -\max\{-\mathbf{c}^\top\mathbf{x} :\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Speciálně místo řešení úlohy (2.1) z Příkladu 2.1.1 můžeme řešit úlohu

$$\left.\begin{array}{r} \max(-3x_1 + x_2 - 2x_3) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = \ 5 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 \leq \ 1 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \ \text{neomezené.} \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Pro úlohy (2.1) a (2.2) pak zřejmě platí: Nabývá-li jedna z úloh optima v bodě $\mathbf{x}$, nabývá tohoto optima v bodě $\mathbf{x}$ i druhá úloha a hodnoty těchto optim se liší znaménkem.

Nahrazení neomezených proměnných nezápornými:
Základem tohoto převodu je jednoduchý fakt, že každé reálné číslo x je možno napsat jako rozdíl dvou nezáporných čísel x^+ a x^-, tj.

$$x = x^+ - x^-,\ x^+ \geq 0,\ x^- \geq 0\ .$$

V obecné úloze lineárního programování tedy nahradíme každou neomezenou proměnnou x_j dvěma nezápornými proměnnými x_j^+ a x_j^-, a to tak, že v dané úloze všude za x_j dosadíme podle vztahu $x_j = x_j^+ - x_j^-$.

Ukažme si to opět na úloze (2.1) z Příkladu 2.1.1. Zde je neomezená proměnná x_3. Zavedeme-li dvě nové nezáporné proměnné x_3^+ a x_3^- a dosadíme-li do úlohy (2.1) podle vztahu $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, dostaneme úlohu

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

$$\left.\begin{array}{r} \min(3x_1 - x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^-) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3^+ - 3x_3^- \geq -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3^+ + 4x_3^- = \ 5 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3^+ + 5x_3^- \leq \ 1 \\ x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0. \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

Zřejmě každému přípustnému řešení x_1, x_2, x_3^+, x_3^- úlohy (2.3) odpovídá přípustné řešení x_1, x_2, x_3, kde $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ původní úlohy (2.1) se stejnou hodnotou účelové funkce. Naopak každému přípustnému řešení x_1, x_2, x_3 úlohy (2.1) odpovídá přípustné řešení x_1, x_2, x_3^+, x_3^- úlohy (2.3), kde např. $x_3^+ = x_3$ a $x_3^- = 0$ pro $x_3 \geq 0$ a $x_3^+ = 0$ a $x_3^- = -x_3$ pro $x_3 < 0$, opět se stejnou hodnotou účelové funkce. Tedy vyřešením nové úlohy (2.3) získáme řešení původní úlohy (2.1).

Nahrazení nerovnic rovnicemi:
Princip postupu si vysvětlíme na jedné nerovnici. Uvažujme např. nerovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b.$$

Zavedeme novou tzv. *doplňkovou proměnnou* x_{n+1}, která splňuje podmínku $x_{n+1} \geq 0$ a která doplní danou nerovnici na rovnici. Tedy

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b.$$

Ekvivalentně lze doplňkovou proměnnou zavést vztahem

$$x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n.$$

Zřejmě čísla $x_1, \ldots, x_n$ splňují vztah

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

právě tehdy, když čísla $x_1, \ldots, x_{n+1}$ splňují vztah

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b, \ \ x_{n+1} \geq 0.$$

Pro opačnou nerovnici, tj. nerovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b, \qquad (2.4)$$

postupujeme tak, že ji nejprve vynásobíme číslem -1, tím dostaneme nerovnici

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq -b,$$

a potom použijeme předchozí postup. Tím dostaneme rovnici

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n + x_{n+1} = -b, \ \ x_{n+1} \geq 0$$

neboli

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - x_{n+1} = b, \ \ x_{n+1} \geq 0.$$

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Tento poslední vztah můžeme také přímo získat tak, že doplňkovou proměnnou $x_{n+1} \geq 0$ odečteme od levé strany nerovnice (2.4).

Ukažme si tento postup na Příkladě 2.1.1. V tomto příkladě jsou dvě nerovnice

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq -1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &\leq \ 1. \end{aligned}$$

Zavedeme tedy dvě doplňkové proměnné x_4 a x_5, $x_4, x_5 \geq 0$, kterými doplníme nerovnice na rovnosti a dostaneme

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \quad &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 \quad + x_5 &= \ 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Úloha pak tedy bude mít tvar

$$\begin{gathered} \min(3x_1 - x_2 + 2x_3) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \quad = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \qquad = \ 5 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 \quad + x_5 = \ 1. \\ x_1, x_2, x_4, x_5 \geq 0, \ x_3 \ \text{neomezené}. \end{gathered}$$

Přitom zřejmě, je-li $x_1, \ldots, x_5$ přípustné řešení této nové úlohy je x_1, x_2, x_3 přípustné řešení původní úlohy (2.1). Naopak, je-li x_1, x_2, x_3 přípustné řešení původní úlohy, je $x_1, \ldots, x_5$ přípustné řešení nové úlohy, když hodnoty doplňkových proměnných určíme z rovnic (2.5). Přitom hodnoty účelové funkce obou úloh jsou stejné.

Zformulujme předchozí postup obecně pro převod úlohy v kanonickém tvaru na tvar standardní.

Věta 2.1.1 *Nechť je dána úloha v kanonickém tvaru*

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n$$

s proměnnými $x_1, \ldots, x_n$.

Zaveďme m doplňkových proměnných $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ a uvažujme úlohu ve standardním tvaru

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \ i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n + m$$

s proměnnými $x_1, \dots, x_{n+m}$. *Potom platí:*
Je-li $x_1, \dots, x_n$ *optimální, resp. přípustné, řešení úlohy v kanonickém tvaru, je* $x_1, \dots, x_{n+m}$, *kde*

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \ \ i = 1, \dots, m,$$

optimální, resp. přípustné, řešení úlohy ve standardním tvaru.
Naopak, je-li $x_1, \dots, x_{n+m}$ *optimální, resp. přípustné, řešení úlohy ve standardním tvaru, je* $x_1, \dots, x_n$ *optimální, resp. přípustné, řešení úlohy v kanonickém tvaru.*

■

Cvičení:

1. Převeďte následující úlohu na úlohu v kanonickém tvaru.

$$\begin{gathered} \max(3x_1 - 2x_2) \\ 3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ -x_1 - 3x_2 \ge 4 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ \ \text{neomezené.} \end{gathered}$$

2. Převeďte následující úlohu na úlohu ve standardním tvaru.

$$\begin{gathered} \min(4x_1 - x_2 + x_3) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{gathered}$$

2.2 Konvexní polyedry

V tomto odstavci si ukážeme některé důležité vlastnosti množiny přípustných řešení úlohy lineárního programování.

Definice 2.2.1 Průnik konečně mnoha poloprostorů prostoru $\mathbf{R}^n$ nazýváme *konvexní polyedr* nebo jen *polyedr*. Tedy polyedr $P \subset \mathbf{R}^n$ je každá množina tvaru

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \ A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\},$$

kde A je nějaká matice typu (m, n) a vektor $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$.

Zdůrazněme, že podle Vět 1.2.4 a 1.2.5 je polyedr skutečně konvexní množina.

Věta 2.2.1 *Množina přípustných řešení obecné úlohy lineárního programování je konvexní polyedr.*

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Důkaz: Množina přípustných řešení obecné úlohy je popsána jednak nerovnostmi a jednak rovnostmi. Každou rovnost $a = b$ lze ale ekvivalentně zapsat jako dvě nerovnosti $a \leq b$ a $-a \leq -b$.

■

Příkladem polyedrů v $\mathbf{R}^2$ jsou např. konvexní mnohoúhelníky. Příkladem polyedrů v $\mathbf{R}^3$ jsou např. mnohostěny jako hranoly nebo jehlany.

V následující definici zavedeme přirozené geometrické pojmy jako jsou vrchol, hrana a stěna polyedru v prostoru $\mathbf{R}^n$.

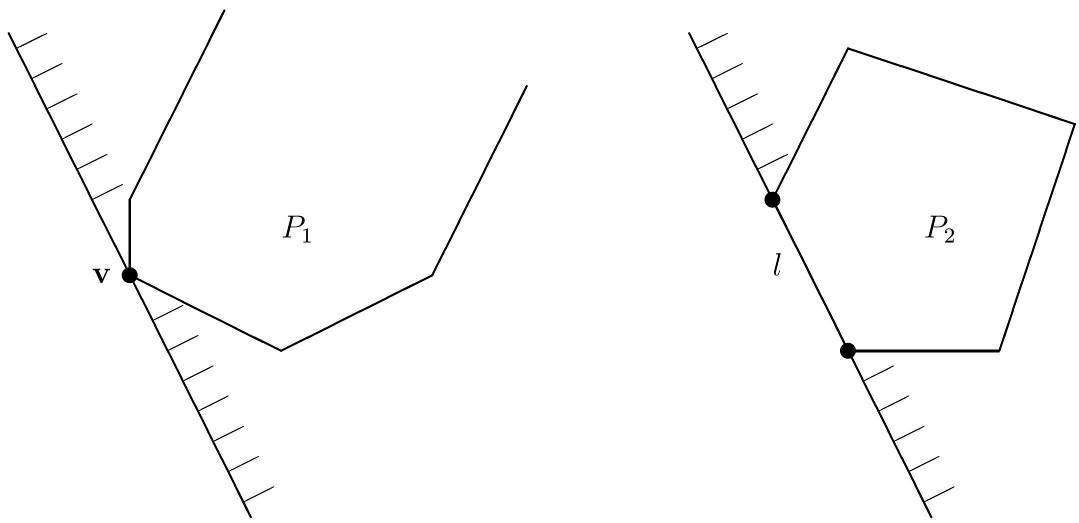
Definice 2.2.2 Nechť $P \subset \mathbf{R}^n$ je polyedr. Říkáme že nerovnost $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$ je *platná nerovnost* pro polyedr P, jestliže celý polyedr P leží v poloprostoru určeném nerovnicí $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$, tj. jestliže nerovnost $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$ je splněna pro každé $\mathbf{x} \in P$.

Je-li $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$ platná nerovnost pro polyedr $P \subset \mathbf{R}^n$, pak množinu

$$S = \{\mathbf{x} \in P : \ \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b\}$$

nazýváme *stěnou* polyedru P. Stěnu tvořenou jedním bodem nazýváme *vrcholem* polyedru P, stěnu tvořenou přímkou, polopřímkou nebo úsečkou *hranou* polyedru P.

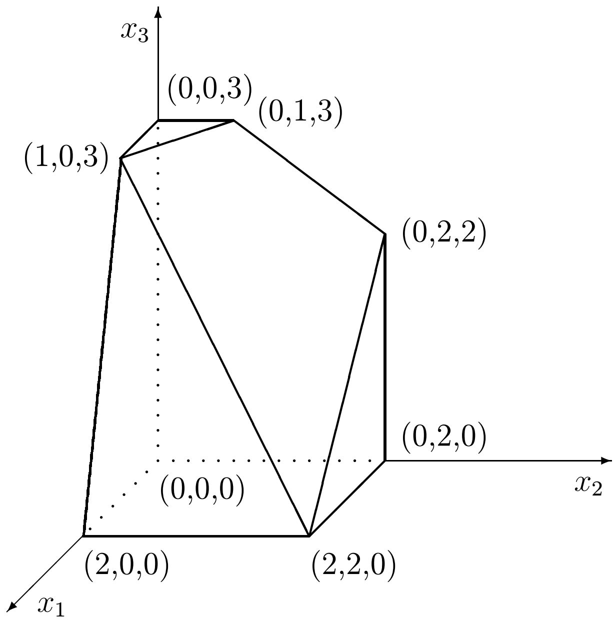
Na Obr. 2.1 jsou znázorněny dva polyedry P_1 a P_2 a poloroviny určující vrchol v polyedru P_1 a hranu l polyedru P_2.



Obrázek 2.1: Polyedry P_1 a P_2

Příklad 2.2.1 Polyedr P na Obr. 2.2 je průnikem 7 poloprostorů určených nerovnostmi

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 4 \\ & & x_2 & & & \leq 2 \\ & & & & x_3 & \leq 3 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & \leq 6 \\ x_1 & & & & & \geq 0 \\ & & x_2 & & & \geq 0 \\ & & & & x_3 & \geq 0. \end{array}$$



Obrázek 2.2: Polyedr P z Příkladu 2.2.1.

V dalším ukážeme, jak je možno polyedr zadat ještě jinak než jako průnik poloprostorů.

Definice 2.2.3 Nechť jsou dány body $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k \in \mathbf{R}^n$ bod

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}^k,$$

kde $\alpha_i \in \langle 0, 1 \rangle,\ i = 1, \ldots, k,\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$, nazýváme *konvexní kombinací* bodů $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$.

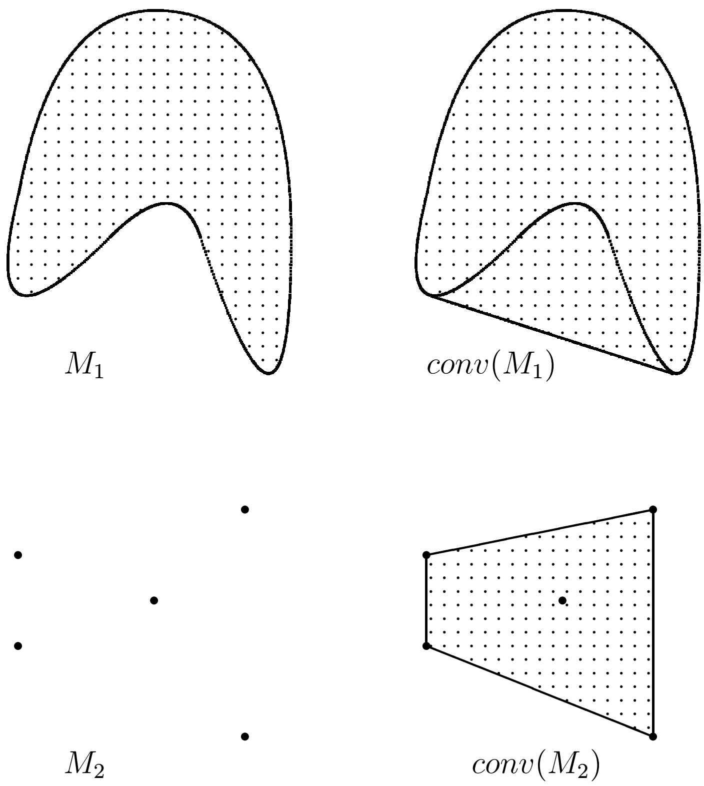
Je-li $M \subset \mathbf{R}^n$, pak *konvexním obalem* množiny M rozumíme množinu

$$conv(M) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \ \mathbf{x} \ \text{ je konvexní kombinací nějakých bodů } M\}.$$

Přímo z Definice 1.2.1 lze snadno ukázat, že $conv(M)$ je konvexní množina. Na druhou stranu platí:
Je-li $M \subset K$ a K je konvexní množina, pak $M \subset conv(M) \subset K$.

Tedy $conv(M)$ je nejmenší konvexní množina, která obsahuje množinu M. Protože průnik konvexních množin je opět konvexní množina, je konvexní obal množiny M průnik všech konvexních množin, které obsahují množinu M.

Na Obr. 2.3 jsou znázorněny množiny M_1 a M_2 a jejich konvexní obaly.



Obrázek 2.3: Množiny a jejich konvexní obaly

Definice 2.2.4 Konvexní obal konečně mnoha bodů nazýváme *polytop*.

Mezi polyedry a polytopy je velmi úzký vztah, jak ukazuje následující věta, která ač se zdá intuitivně zřejmá, nemá jednoduchý důkaz.

Věta 2.2.2 (Minkowského) *Množina P je polytop právě tehdy, když P je ohraničený polyedr.*

■

Předchozí větu je také možno formulovat následovně:
1. Konvexní obal konečně mnoha bodů je průnik konečně mnoha poloprostorů.
2. Je-li polyedr P ohraničený, je konvexní kombinací svých vrcholů.

Např. polyedr P_2 na Obr. 2.1 je polytop, polyedr P_1 polytop není.

Než dokážeme hlavní větu tohoto odstavce, ukažme si ještě jiné charakteristiky vrcholu polyedru.

Věta 2.2.3 *Nechť $P \subset \mathbf{R}^n$ je polyedr a $\mathbf{v} \in P$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*
1. Bod $\mathbf{v}$ je vrchol polyedru P.
2. Existuje $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ tak, že lineární funkce $z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ nabývá na P svého maxima pouze v bodě $\mathbf{v}$, tj. $\mathbf{c}^\top \mathbf{v} > \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{v}$.
3. Je-li $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{z}$ pro nějaké $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$, $0 < \alpha < 1$, pak $\mathbf{v} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$.

Důkaz: Postupně dokážeme tři implikace:

a) 1.⇒2.:
Nechť $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b$ je platná nerovnost pro P, a nadrovina $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ určuje vrchol $\mathbf{v}$. Tedy $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b$ pro $\mathbf{x} \in P$ právě tehdy, když $\mathbf{x} = \mathbf{v}$, tj. $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} < b$ pro $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{v}$, a $\mathbf{a}^\top \mathbf{v} = b$. Pak zřejmě $z = \mathbf{a}^\top \mathbf{x}$ nabývá svého maxima na P právě ve $\mathbf{v}$.

b) 2.⇒3.:
Nechť $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{z}$, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$, $0 < \alpha < 1$ a nechť funkce $z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ nabývá svého maxima na P pouze ve $\mathbf{v}$. Potom

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{v} = \alpha \mathbf{c}^\top \mathbf{y} + (1-\alpha)\mathbf{c}^\top \mathbf{z} \leq \alpha \mathbf{c}^\top \mathbf{v} + (1-\alpha)\mathbf{c}^\top \mathbf{v} = \mathbf{c}^\top \mathbf{v}.$$

Odtud $\mathbf{c}^\top \mathbf{v} = \mathbf{c}^\top \mathbf{y} = \mathbf{c}^\top \mathbf{z}$. Protože funkce $z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ nabývá na P maximum pouze ve $\mathbf{v}$, je nutně $\mathbf{v} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$.

c) 3.⇒1.:
Nechť polyedr $P \subset \mathbf{R}^n$ je určen nerovnostmi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \ i = 1, \ldots, m. \tag{2.6}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že pro bod $\mathbf{v}$ platí právě v prvních s nerovnostech (2.6) rovnost, $0 \leq s \leq m$. Kdyby $s = 0$, pak jistě pro libovolný vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ a dosti malé číslo $\alpha > 0$ platí $\mathbf{y} = \mathbf{v} + \alpha \mathbf{u} \in P$ a $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \alpha \mathbf{u} \in P$. Odtud

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z},$$

což není možné, a tedy nutně $s > 0$.

Nechť nerovnost

$$\sum_{j=1}^{n} a_jx_j \leq b \tag{2.7}$$

je součtem prvních s nerovností (2.6), tj. $a_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$, $b = \sum_{i=1}^{s} b_i$. Nerovnost (2.7) je zřejmě splněna pro každé $\mathbf{x} \in P$, a tedy je platná nerovnost pro P. Navíc bod $\mathbf{v}$ ji zřejmě splňuje s rovností.

K dokončení důkazu stačí ukázat že bod $\mathbf{v}$ je jediný bod P, splňující (2.7) s rovností. Nechť naopak i bod $\mathbf{u} \in P$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ splňuje (2.7) s rovností. Pak pro dosti malé $\alpha > 0$ jsou body $\mathbf{y} = \mathbf{v} + \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ a $\mathbf{z} = \mathbf{v} - \alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ body polyedru P. To ale není možné, neboť opět

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}.$$

■

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Definice 2.2.5 Je-li $P \subset \mathbf{R}^n$ libovolná konvexní množina, pak bod $\mathbf{v}$, který splňuje podmínku 3. předchozí věty nazýváme *krajní bod* množiny P.

Příklad 2.2.2 Je-li např. P uzavřený kruh v $\mathbf{R}^2$, např. $P = \{(x_1, x_2) : \ {x_1}^2 + {x_2}^2 \le 1\}$, pak krajní body P jsou právě všechny body ležící na kružnici ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$. Je-li P otevřený kruh v $\mathbf{R}^2$, např. $P = \{(x_1, x_2) : \ {x_1}^2 + {x_2}^2 < 1\}$, pak P krajní body nemá.

Pro další charakteristiku vrcholu zaveďme následující označení. Je-li $P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$ polyedr a $\mathbf{v} \in P$. Označme symbolem $A_\mathbf{v}$ podmatici matice A sestávající z těch řádků $\mathbf{a}_i$ matice A, že $\mathbf{a}_i\mathbf{v} = b_i$. ($b_i$ je i-tá souřadnice vektoru $\mathbf{b}$.)

Věta 2.2.4 *Nechť $P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \ A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$ je polyedr a $\mathbf{v} \in P$. Pak $\mathbf{v}$ je vrchol P právě tehdy, když pro hodnost $h(A_\mathbf{v})$ matice $A_\mathbf{v}$ platí $h(A_\mathbf{v}) = n$.*

Důkaz: Nechť $\mathbf{v}$ je vrchol polyedru P a nechť $h(A_\mathbf{v}) < n$. Pak jistě existuje vektor $\mathbf{c} \ne \mathbf{0}$, že $A_\mathbf{v}\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Protože $\mathbf{a}_i\mathbf{v} < b_i$ pro každý řádek $\mathbf{a}_i$ matice A, který není obsažen v matici $A_\mathbf{v}$, existuje číslo $\delta > 0$, že

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{v} + \delta\mathbf{c}) \le b_i \quad \text{a současně} \quad \mathbf{a}_i(\mathbf{v} - \delta\mathbf{c}) \le b_i$$

pro každý řádek $\mathbf{a}_i$, který není obsažen v matici $A_\mathbf{v}$. Odtud z volby $\mathbf{c}$ dostáváme

$$A(\mathbf{v} + \delta\mathbf{c}) \le \mathbf{b} \quad \text{a současně} \quad A(\mathbf{v} - \delta\mathbf{c}) \le \mathbf{b}\ .$$

Tedy body $\mathbf{v} + \delta\mathbf{c}$ a $\mathbf{v} - \delta\mathbf{c}$ patří do polyedru P a přitom $\mathbf{v}$ je jejich konvexní kombinací. To ale není možné podle věty 2.2.3.

Naopak, nechť $h(A_\mathbf{v}) = n$ a $\mathbf{v}$ není vrchol polyedru P. Pak podle věty 2.2.3 existují body $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ $\mathbf{y}, \ \mathbf{z} \ne \mathbf{v}$, polyedru P, že $\mathbf{v} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z})$. Pro každý řádek $\mathbf{a}_i$ matice $A_\mathbf{v}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i\mathbf{y} \le b_i = \mathbf{a}_i\mathbf{v} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{a}_i(\mathbf{y} - \mathbf{v}) \le 0\ , \\ \mathbf{a}_i\mathbf{z} \le b_i = \mathbf{a}_i\mathbf{v} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{a}_i(\mathbf{z} - \mathbf{v}) \le 0\ . \end{aligned}$$

Protože $\mathbf{z} - \mathbf{v} = -(\mathbf{y} - \mathbf{v})$, je $\mathbf{a}_i(\mathbf{y} - \mathbf{v}) = 0$. Odtud také $A_\mathbf{v}(\mathbf{y} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$. To je ve sporu s předpokladem $h(A_\mathbf{v}) = n$, protože $\mathbf{v} \ne \mathbf{y}$.

■

Následující věta má zásadní význam pro hledání maxima nebo minima lineární funkce na polyedru.

Věta 2.2.5 *Nechť $P \subset \mathbf{R}^n$ je ohraničený polyedr, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$. Pak lineární funkce $z = \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ nabývá svého maxima v nějakém vrcholu polyedru P.*

Důkaz: Protože P je ohraničená a uzavřená množina, nabývá na ní podle Věty 1.2.3 spojitá funkce $z = \mathbf{c}^\top\mathbf{x}$ svého maxima v nějakém bodě $\mathbf{y} \in P$. Nechť $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ jsou všechny vrcholy polyedru P. Protože podle Věty 2.2.2 je $\mathbf{y}$ konvexní kombinací vrcholů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$, existují čísla $\alpha_i \in \langle 0, 1\rangle, \ i = 1, \dots, k, \ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ tak,že

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \alpha_i\mathbf{v}^i.$$

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Kdyby $\mathbf{c}^\top \mathbf{v}^i < \mathbf{c}^\top \mathbf{y}$ pro každé $i = 1, \ldots, k$, pak

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{y} = \mathbf{c}^\top \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\mathbf{c}^\top \mathbf{v}^i) < \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\mathbf{c}^\top \mathbf{y}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{y} \sum_{i=1}^{k} \alpha^i = \mathbf{c}^\top \mathbf{y},$$

což není možné. Tedy $\mathbf{c}^\top \mathbf{v}^i \geq \mathbf{c}^\top \mathbf{y}$ alespoň pro jedno $i = 1 \ldots, k$ a maximum se nabývá ve vrcholu.

■

Poznámka 2.2.1 Máme-li tedy hledat $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in P$, kde P je ohraničený polyedr, stačí podle předchozí věty probrat všechny vrcholy polyedru P a porovnat hodnoty účelové funkce $z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ v jednotlivých vrcholech. Tento postup však naráží na dvě obtíže. Jednak polyedr P bývá většinou zadán jako průnik poloprostorů a ne jako soubor svých vrcholů. Je tedy třeba umět nejprve vypočítat jeho vrcholy. Druhá potíž je v tom, že i když je polyedr P zadán jako průnik relativně málo poloprostorů, může být počet jeho vrcholů řádově mnohokrát větší a zjištění hodnot účelové funkce ve všech vrcholech prakticky neproveditelné. Při praktickém výpočtu nemůžeme probírat všechny vrcholy, ale musíme některé vrcholy, ty o kterých víme, že v nich maximum být nemůže, z vyšetřování vypustit. Tak to činí simplexová metoda, jak uvidíme dále.

Příklad 2.2.3 Určete $\max(-x_1 + 2x_2 + 3x_3)$ pro $\mathbf{x} \in P$, kde P je polyedr z Příkladu 2.2.1.

Řešení: Protože polyedr P je ohraničený, viz. Obr. 2.2, stačí zjistit hodnoty účelové funkce z pro všechny jeho vrcholy. Postupným dosazováním zjistíme, že maximum se nabývá ve vrcholu $(0, 1, 3)$, kde $z_{\max} = 11$.

Cvičení:

1. Probráním všech vrcholů příslušného polyedru určete

$$\begin{aligned} &\max(5x_1 + 3x_2) \\ &2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ &2x_1 \ + x_2 \leq 10 \\ &x_1 \qquad \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   Nakreslete si obrázek!

2. Nechť P je konvexní obal bodů $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(3, 3)$, $(4, -2)$ a $(-1, 0)$. Zadejte polyedr P jako průnik polorovin. Nakreslete si obrázek!.

2.3 Bazické řešení

Jak již bylo řečeno, pracuje simplexová metoda s úlohou ve standardním tvaru. Uvažujme tedy v dalším úlohu

$$\left.\begin{array}{r} \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

kde A je matice typu (m, n).

Zaveďme nejprve některé předpoklady týkající se soustavy lineárních rovnic

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2.9}$$

Chceme-li, aby soustava (2.9) byla vůbec řešitelná, je podle Frobeniovy věty nutné, aby hodnost $h(A)$ matice A byla stejná jako hodnost rozšířené matice $[A|\mathbf{b}]$. Navíc můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $h(A) = m$, protože v opačném případě, pokud je soustava (2.9) řešitelná, můžeme závislé rovnice z této soustavy vynechat. V dalším budeme předpokládat $h(A) = m$, a tedy $m \leq n$.

Zásadní význam pro simplexovou metodu má pojem bazického řešení soustavy (2.9).

Definice 2.3.1 Nechť $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \ldots, x_n$ a $h(A) = m$. Výběr m různých proměnných $\mathcal{B} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ z proměnných $x_1, \ldots, x_n$ nazveme *bazí* soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, jestliže sloupce matice A, které odpovídají proměnným $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ tvoří regulární matici B. Tedy j-tý sloupec matice B je i_j-tý sloupec matice A, $j = 1, \ldots, m$. Proměnné $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ pak nazýváme *bazickými proměnnými* a ostatní proměnné x_j, $j \neq i_1, \ldots, i_m$, *nebazickými.*

Bazické řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ je takové jediné řešení $\mathbf{x}^B$ této soustavy, kdy nebazické proměnné jsou nulové, tj.

$$x_j^B = 0, , \text{ pro } j \neq i_1, \ldots, i_m.$$

Bazické řešení $\mathbf{x}^B$ nazveme *přípustným bazickým řešením*, jestliže je přípustným řešením úlohy (2.8), tj. jestliže $x_j^B \geq 0$ pro $j = 1, \ldots, n$.

Konečně bazické řešení nazýváme *degenerované*, jestliže je hodnota některé bazické proměnné rovna 0. V opačném případě, kdy hodnoty všech bazických proměnných jsou nenulové, nazýváme řešení *nedegenerované.*

Poznámka 2.3.1 Bazické řešení soustavy (2.9) s bazí $\mathcal{B} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ je tedy takové řešení této soustavy, kdy hodnoty nebazických proměnných jsou rovny 0 a hodnoty bazických proměnných jsou pak jednoznačně určeny ze soustavy m rovnic o m neznámých, která vznikne ze soustavy (2.9) dosazením hodnoty 0 za všechny nebazické proměnné. Matice B této soustavy je podle předpokladu regulární, a tedy tato soustava má opravdu jediné řešení. Je-li B regulární matice, pak jediné řešení soustavy $B\mathbf{y} = \mathbf{b}$ lze vyjádřit jako $\mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{b}$, a proto je možno bazické řešení přímo vyjádřit vztahy

$$x_j^B = 0, \text{ pro } j \neq i_1, \ldots, i_m$$

$$x_{i_j}^B = j \text{ -té souřadnici vektoru } \ B^{-1}\mathbf{b}, \ j = 1, \ldots, m.$$

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Dokonce, tvoří-li proměnné $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ bazi soustavy (2.9), je možno hodnoty nebazických proměnných volit libovolně jako parametry a hodnoty bazických proměnných jsou pak touto volbou jednoznačně určeny. Pro bazické řešení však podle Definice 2.3.1 volíme hodnoty nebazických proměnných rovny 0.

Ilustrujme si pojmy z Definice 2.3.1 na příkladě.

Příklad 2.3.1 Uvažujme soustavu

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -3 \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

Označme symbolem A matici této soustavy. Pak $\mathcal{B} = (x_1, x_2)$ tvoří bazi této soustavy, protože první dva sloupce matice A jsou lineárně nezávislé, a tedy tvoří regulární matici

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Bazické řešení této soustavy odpovídající bazi $\mathcal{B}$ dostaneme následovně: Zvolíme hodnoty nebazických proměnných rovny 0, tj. $x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$, a dosadíme je do dané soustavy. Tím dostaneme soustavu

$$\begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_1 - 2x_2 = -3. \end{array}$$

Tato soustava má jediné řešení $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Tedy bazické řešení odpovídající bazi $\mathcal{B}$ je vektor

$$\mathbf{x}^B = (1, 2, 0, 0, 0)^\top.$$

Je to přípustné bazické nedegenerované řešení. Hodnoty bazických proměnných x_1, x_2 je též možno vyjádřit vztahem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Jinou bazí je např. baze $\mathcal{B} = (x_1, x_3)$, protože opět první a třetí sloupec matice A jsou lineárně nezávislé. Volbou hodnot nebazických proměnných $x_2 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$ a dosazením do dané soustavy dostaneme

$$\begin{array}{r} 2x_1 + 8x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_3 = -3. \end{array}$$

Jediné řešení této soustavy je $x_1 = -1,\ x_3 = 1$. Tedy bazické řešení $\mathbf{x}^B = (-1, 0, 1, 0, 0)^\top$ odpovídající této bazi $\mathcal{B} = (x_1, x_3)$ je nepřípustné.

Zvolíme-li bazi $\mathcal{B} = (x_4, x_5)$ (ověřte, že je to baze), pak hodnoty bazických proměnných získáme jako řešení soustavy

$$\begin{array}{r} x_4 + 2x_5 = 6 \\ x_4 - x_5 = -3. \end{array}$$

Odtud $x_4 = 0,\ x_5 = 3$. Bazické řešení odpovídající této bazi je $\mathbf{x}^B = (0, 0, 0, 0, 3)^\top$, což je degenerované přípustné bazické řešení.

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Následující věta spolu s Větou 2.2.3 ukazuje význam bazických řešení pro hledání optimálního řešení.

Věta 2.3.1 *Vektor* $\mathbf{x}^B$ *je přípustným bazickým řešením soustavy* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *právě tehdy, když* $\mathbf{x}^B$ *je krajní bod polyedru*

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

a tedy podle Věty 2.2.3 jeho vrchol.

Důkaz: Předpokládejme nejprve sporem, že přípustné bazické řešení $\mathbf{x}^B$ není krajním bodem polyedru P. Tedy podle Definice 2.2.5 existují dva body $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in P$ různé od $\mathbf{x}^B$ a číslo $\lambda, \ 0 < \lambda < 1$ tak,že

$$\mathbf{x}^B = \lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}.$$

Speciálně pro každou nebazickou souřadnici x_j^B vektoru $\mathbf{x}^B$ platí

$$0 = x_j^B = \lambda y_j + (1 - \lambda)z_j,$$

a protože $y_j \geq 0$ i $z_j \geq 0$, nutně $y_j = 0$ i $z_j = 0$. Pak ale $\mathbf{x}^B = \mathbf{y} = \mathbf{z}$, protože volbou hodnot nebazických proměnných je řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jednoznačně určeno.

Naopak, zvolme nyní nějaký krajní bod $\bar{\mathbf{x}}$ polyedru P a ukážeme, že $\bar{\mathbf{x}}$ je přípustné bazické řešení soustavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. K tomu stačí ukázat, že sloupce matice A, které odpovídají nenulovým souřadnicím vektoru $\bar{\mathbf{x}}$ jsou lineárně nezávislé. Stačí pak totiž tyto sloupce doplnit nějakými dalšími sloupci matice A na regulární matici B a pro odpovídající bazické řešení $\mathbf{x}^B$ pak nutně platí $\mathbf{x}^B = \bar{\mathbf{x}}$.

Označme tedy symbolem A_j j-tý sloupec matice A a položme

$$J = \{j : \ \bar{x}_j > 0, \ j = 1, \ldots, n\}$$

a předpokládejme naopak, že sloupce $A_j, \ j \in J$ tvoří lineárně závislý systém vektorů. Tedy podle definice lineární závislosti existují čísla $\alpha_j, \ j \in J$, z nichž je alespoň jedno nenulové tak, že

$$\sum_{j \in J} \alpha_j A_j = \mathbf{0}.$$

Protože $\bar{\mathbf{x}} \in P$ je

$$\sum_{j \in J} \bar{x}_j A_j = \mathbf{b}.$$

Z těchto posledních dvou vztahů okamžitě plyne, že pro každé $t \in \mathbf{R}$ je

$$\sum_{j \in J} (\bar{x}_j \pm t\alpha_j) A_j = \mathbf{b}. \tag{2.11}$$

Protože pro $j \in J$ je $\bar{x}_j > 0$, jistě existuje nějaké $t_0 > 0$ tak,že

$$\bar{x}_j + t_0\alpha_j \geq 0 \ \text{ a } \ \bar{x}_j - t_0\alpha_j \geq 0 \tag{2.12}$$

pro každé $j \in J$. Definujme nyní dva body $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ polyedru P následovně

$$y_j = \begin{cases} \bar{x}_j + t_0\alpha_j, & j \in J \\ 0, & j \notin J, \end{cases},$$

$$z_j = \begin{cases} \bar{x}_j - t_0\alpha_j, & j \in J \\ 0, & j \notin J, \end{cases}.$$

Ze vztahů (2.11) a (2.12) okamžitě plyne, že $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ jsou různé body polyedru P a přitom

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}.$$

To ale není možné, protože podle předpokladu je $\bar{\mathbf{x}}$ krajní bod polyedru P.

■

Poznámka 2.3.2 Všimněme si ještě jedné důležité věci. V Příkladě 2.3.1 tvořily bazi $\mathcal{B}$ např. proměnné x_1, x_2. To znamená, že rozšířenou matici soustavy (2.10) lze ekvivalentními úpravami převést na matici, jejíž první a druhý sloupec tvoří jednotkovou matici. To vlastně představuje řešení dané soustavy Gauss-Jordanovou metodou. V našem případě

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 8 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 6 & 12 & -1 & 4 & 12 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & -1/6 & 2/3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 2/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/6 & 2/3 & 2 \end{array}\right].$$

Poslední sloupec konečné rozšířené matice pak určuje přímo hodnoty bazických proměnných.

Obecně, je-li dána soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a např. prvních m proměnných $x_1, \ldots, x_m$ tvoří bazi (tedy prvních m sloupců matice A je lineárně nezávislých), lze rozšířenou matici soustavy upravit Gauss-Jordanovou metodou tak, že prvních m sloupců vzniklé matice tvoří jednotkovou matici. Tedy rozšířenou matici soustavy lze upravit ekvivalentními úpravami na tvar

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \bar{a}_{1,m+1} & \ldots & \bar{a}_{1,n} & \bar{b}_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \bar{a}_{2,m+1} & \ldots & \bar{a}_{2,n} & \bar{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \ldots & \bar{a}_{m,n} & \bar{b}_m \end{array}\right]$$

Poslední sloupec této matice pak určuje přímo hodnoty bazických proměnných, tj.

$$x_j = \bar{b}_j, \; j = 1, \ldots, m.$$

Cvičení:

1. Určete bazické řešení $\mathbf{x}^B$ soustavy

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 6x_5 &= \ \ 4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= \ \ 7 \end{aligned}$$

   a) pro bazi $\mathcal{B} = (x_1, x_3, x_4)$,
   b) pro bazi $\mathcal{B} = (x_1, x_3, x_5)$.
   Které z těchto bazických řešení bazických řešení je přípustné a které degenerované?

2. Existuje nějaké bazické řešení soustavy z předchozího cvičení s bazí, která obsahuje proměnné x_1, x_2?

3. Určete všechna přípustná bazická řešení rovnice $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$. Zároveň určete všechny vrcholy polyedru

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$$

   Polyedr P nakreslete!

2.4 Simplexová metoda

Uvažujme úlohu lineárního programování (2.8) ve standardním tvaru, tj. úlohu

$$\begin{gathered} \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{gathered}$$

kde A je matice typu (m, n), $h(A) = m$. Budeme dále předpokládat, že $m < n$, protože pro $m = n$ má soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jediné řešení a optimalizace je triviální.

Zjednodušeně lze simplexovou metodu pro řešení úlohy (2.8) popsat následovně:

K přípustnému bazickému řešení $\mathbf{x}^B$ určenému bazí $\mathcal{B}$ sestrojíme jiné přípustné bazické řešení $\mathbf{x}^{B'}$ s bazí $\mathcal{B}'$. Přitom baze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ se budou lišit pouze v jedné proměnné, což znamená, že baze $\mathcal{B}'$ vznikne z baze $\mathcal{B}$ tak, že jednu proměnnou do baze $\mathcal{B}$ *přidáme* a jinou z ní *vypustíme*. Přitom hodnota účelové funkce $z = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ pro nové bazické řešení $\mathbf{x}^{B'}$ bude větší než hodnota účelové funkce pro řešení $\mathbf{x}^B$. Pouze v případě, že $\mathbf{x}^B$ je degenerované řešení, může hodnota účelové funkce zůstat stejná. Tento postup se opakuje znovu s novou bazí $\mathcal{B}'$ místo $\mathcal{B}$. Pokud již bazi $\mathcal{B}'$ s uvedenými vlastnostmi nelze sestrojit, je nalezené bazické řešení optimální. V průběhu výpočtu též poznáme případ, kdy účelová funkce je na daném polyedru přípustných řešení neomezená. Protože bazických řešení dané soustavy je jen konečný počet, nalezneme po konečném počtu kroků optimální řešení nebo zjistíme, že úloha má neomezené optimum.

Protože přípustná bazická řešení odpovídají jednoznačně vrcholům polyedru P přípustných řešení, vybírá předchozí postup cestu z jednoho vrcholu polyedru P do dalšího tak, že

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

hodnota účelové funkce se stále zvyšuje. To, že baze $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ se liší pouze v jedné proměnné, geometricky znamená, že z vrcholu $\mathbf{x}^B$ do vrcholu $\mathbf{x}^{B'}$ jdeme po hraně polyedru P.

V další části tohoto odstavce tento nastíněný postup simplexové metody popíšeme přesně a ukážeme, jak jednotlivé kroky prakticky provést.

Přechod od jedné baze k druhé:
Mějme tedy soustavu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a bazi $\mathcal{B}$. Pro jednoduchost předpokládejme, že bazi $\mathcal{B}$ tvoří prvních m proměnných, tj. $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_m)$. Dále předpokládejme, že prvních m sloupců matice A tvoří jednotkovou matici, viz. Poznámka 2.3.2. Tedy rozšířená matice dané soustavy má tvar

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1,n} & & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,m+1} & \dots & a_{2,n} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{m,n} & & b_m \end{array}\right]$$

Nechť řešení $\mathbf{x}^B$ odpovídající bazi $\mathcal{B}$ je *přípustné* řešení. Protože hodnota bazické proměnné x_j je právě b_j, znamená to, že $b_j \geq 0$ pro $j = 1, \dots, m$. Uvažujme situaci, kdy do baze přidáme proměnnou x_{m+1} a z baze vypustíme nějakou proměnnou x_i, $1 \leq i \leq m$. Zkoumejme podmínky, za kterých nové bazické řešení $\mathbf{x}^{B'}$ s bazí

$$\mathcal{B}' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+1})$$

bude přípustné bazické řešení.
a) Jelikož sloupce matice A odpovídající proměnným baze $\mathcal{B}'$ mají být lineárně nezávislé, musí nutně být $a_{i,m+1} \neq 0$.
b) Jelikož $(m+1)$-ní souřadnice bazického řešení $\mathbf{x}^{B'}$ má být nezáporná, musí nutně být $a_{i,m+1} > 0$.
c) Jelikož i hodnoty ostatních proměnných bazického řešení $\mathbf{x}^{B'}$ mají být kladné, je nutné volit i tak, že

$$\frac{b_i}{a_{i,m+1}} = \min\{\frac{b_k}{a_{k,m+1}} : \ k = 1, \dots, m, \ a_{k,m+1} > 0\},$$

tj. ze všech proměnných x_k, $k = 1, \dots, m$ takových, že $a_{k,m+1} > 0$ vypustit z baze tu proměnnou x_k, pro kterou je podíl $\dfrac{b_k}{a_{k,m+1}}$ nejmenší.

Dříve než tyto pravidla zformulujeme ve formě věty pro obecnou bazi, ilustrujme si je na příkladě.

Příklad 2.4.1 Uvažujme soustavu

$$\begin{array}{l} x_1 \qquad\qquad + 2x_5 - 4x_6 + 2x_7 = 4 \\ \quad x_2 \qquad\quad - x_5 + 2x_6 - 4x_7 = 3 \\ \qquad x_3 \qquad\qquad + 2x_6 + 2x_7 = 2 \\ \qquad\quad x_4 + x_5 - 3x_6 + x_7 = 3 \\ \qquad\quad x_1, \dots, x_7 \geq 0 \end{array}$$

s bazí $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_4)$. Rozšířená matice $[A|\mathbf{b}]$ této soustavy je matice

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

V simplexové metodě budeme tuto matici zapisovat poněkud jinak. Předně jí budeme psát do tzv. *simplexové tabulky*, ve které bude první řádek obsahovat názvy jednotlivých proměnných. Dále sloupec pravých stran dané soustavy budeme psát odděleně vlevo. Protože tento sloupec přímo určuje hodnotu bazických proměnných, do tabulky tyto hodnoty vyznačíme. Tím zároveň ukážeme, jaké proměnné jsou pro danou tabulku bazické. Zápis uvažované soustavy s bazí $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_4)$ bude mít tvar

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$x_1 = 4$	1	0	0	0	2	-4	2
$x_2 = 3$	0	1	0	0	-1	2	-4
$x_3 = 2$	0	0	1	0	0	2	2
$x_4 = 3$	0	0	0	1	1	-3	1

Zaveďme nyní do baze $\mathcal{B}$ proměnnou x_5 a zkoumejme, kterou proměnnou z baze $\mathcal{B}$ vypustíme, aby nové bazické řešení bylo opět přípustné.
a) Zřejmě to nemůže být proměnná x_3, protože sloupce u proměnných x_1, x_2, x_4, x_5 jsou lineárně závislé. (Ověřte!)
b) Rovněž to nemůže být proměnná x_2, protože $a_{25} < 0$. V tomto případě bychom nutně dostali $x_5 = -3$, protože hodnoty nebazických proměnných jsou $x_2 = x_6 = x_7 = 0$. To by však znamenalo nepřípustné řešení.
c) Podle výše uvedeného pravidla utvořme podíly

$$\frac{b_1}{a_{15}} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{b_4}{a_{45}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Protože z těchto dvou čísel je menší $\frac{b_1}{a_{15}} = 2$, vypustíme z baze proměnnou x_1. Bazické řešení odpovídající nové bazi $\mathcal{B}' = (x_2, x_3, x_4, x_5)$ pak bude přípustné. Výpočet tohoto nového bazického řešení provedeme Gauss-Jordanovou eliminací, tj. tak, že první řádek rozšířené matice dané soustavy vydělíme 2 a jeho vhodné násobky přičteme k ostatním řádkům této matice, aby se čísla v ostatních řádcích pátého sloupce anulovala. Tedy dostaneme

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Naprosto stejně to můžeme provést i v simplexové tabulce a dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$x_5 = 2$	1/2	0	0	0	1	-2	1
$x_2 = 5$	1/2	1	0	0	0	0	-3
$x_3 = 2$	0	0	1	0	0	2	2
$x_4 = 1$	-1/2	0	0	1	0	-1	0

Řešení $x_1 = x_6 = x_7 = 0, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 1, x_5 = 2$ je opravdu bazické řešení dané soustavy s bazí $\mathcal{B}'$.

Ukažme si ještě, co by se stalo, kdybychom místo proměnné x_1 vypustili z baze $\mathcal{B}$ proměnnou x_4. Dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$x_1 = -2$	1	0	0	-2	0	2	0
$x_2 = 6$	0	1	0	1	0	-1	-3
$x_3 = 2$	0	0	1	0	0	2	2
$x_5 = 3$	0	0	0	1	1	-3	1

Získané bazické řešení $x_4 = x_6 = x_7 = 0, x_1 = -2, x_2 = 6, x_3 = 2, x_5 = 6$ není přípustné řešení.

Věta 2.4.1 *Nechť je dána soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ proměnnými $x_1, \ldots, x_n$, baze $\mathcal{B} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ a nechť sloupce $i_1, \ldots, i_m$ matice A tvoří (v tomto pořadí) jednotkovou matici. Nechť bazické řešení x^B odpovídající bazi $\mathcal{B}$ je přípustné, tj. $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Jestliže a_{lk}, kde $k \neq i_1, \ldots, i_m$, je takový prvek matice A, že*
a) $a_{lk} > 0$,
b) pro všechna $j = 1, \ldots, m$ taková, že $a_{jk} > 0$, je

$$\frac{b_l}{a_{lk}} \leq \frac{b_j}{a_{jk}},$$

pak bazické řešení $\mathbf{x}^{B'}$ odpovídající bazi $\mathcal{B}'$, která vznikne z baze $\mathcal{B}$ přidáním proměnné x_k a vypuštěním proměnné x_{i_l} je přípustné bazické řešení dané soustavy.

■

Poznámka 2.4.1 Prvek a_{ik} z předchozí věty se nazývá *pivot* a v původní simplexové tabulce jej budeme označovat hvězdičkou.

Výběr proměnné vstupující do baze:
V předchozí části jsme si ukázali, jak určit proměnnou x_i, kterou z baze vypustíme, chceme-li do baze přidat proměnnou x_k a chceme-li, aby nové bazické řešení bylo přípustné. Volbu proměnné x_k, kterou do baze přidáme, provedeme tak, aby hodnota účelové funkce v případě hledání maxima vzrostla.

Ukažme si to nejprve na úloze z Příkladu 2.4.1:

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Příklad 2.4.2 Uvažujme úlohu

$$\max(-3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 - 4x_6 - 5x_7)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 2x_5 - 4x_6 + 2x_7 &= 4 \\ x_2 \qquad - x_5 + 2x_6 - 4x_7 &= 3 \\ x_3 \qquad + 2x_6 + 2x_7 &= 2 \\ x_4 + x_5 - 3x_6 + x_7 &= 3 \\ x_1, \ldots, x_7 \geq 0. & \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Účelová funkce této úlohy je funkce $z = -3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 - 4x_6 - 5x_7$. Rovnice soustavy (2.13) lze přepsat do tvaru

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 4 - 2x_5 + 4x_6 - 2x_7 \\ x_2 &= 3 + x_5 - 2x_6 + 4x_7 \\ x_3 &= 2 \qquad - 2x_6 - 2x_7 \\ x_4 &= 3 - x_5 + 3x_6 - x_7, \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

který ukazuje hodnoty bazických proměnných v závislosti na volbě hodnot nebazických proměnných (parametrů). Z rovnic (2.14) lze dosadit za bazické proměnné $x_1, \ldots, x_4$ do funkčního předpisu účelové funkce z a vyjádřit tak tuto funkci jako funkci nebazických proměnných. Dostaneme

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 - 4x_6 - 5x_7 \\ &= -3(4 - 2x_5 + 4x_6 - 2x_7) + 2(3 + x_5 - 2x_6 + 4x_7) \\ &\quad -(3 - x_5 + 3x_6 - x_7) + x_5 - 4x_6 - 5x_7 \\ &= -9 + 10x_5 - 23x_6 + 10x_7. \end{aligned}$$

Koeficienty u nebazických proměnných budeme nazývat *relativní ceny* nebazických proměnných *vzhledem k bazi* $\mathcal{B}$ a budeme je značit symboly $\bar{c}_j$. Tedy $\bar{c}_5 = 10$, $\bar{c}_6 = -23$ a $\bar{c}_7 = 10$. Všimněme si, že číslo -9 je právě hodnota účelové funkce pro uvažované bazické řešení. Zřejmě, je-li relativní cena nebazické proměnné kladná, pak zvětšením hodnoty této nebazické proměnné se zvýší i hodnota účelové funkce. Zavedeme-li tedy do baze proměnou x_5, a v tomto případě musíme z baze vypustit proměnnou x_1, jak jsme již dříve spočítali, dostaneme nové bazické řešení $x_1 = x_6 = x_7 = 0, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 1, x_5 = 2$ s hodnotou účelové funkce $z = 11$.

Výpočet relativních cen i hodnot účelové funkce budeme samozřejmě provádět přímo v simplexové tabulce. K tomu do této tabulky vložíme ještě jeden oddělený řádek pod řádek s názvy proměnných. Tomuto dalšímu řádku budeme říkat *cenový řádek*.

Na hodnotu účelové funkce $z = -3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 - 4x_6 - 5x_7$ lze též pohlížet jako na rovnici s další proměnnou $-z$

$$0 = -z - 3x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 - 4x_6 - 5x_7. \tag{2.15}$$

Hodnotu této proměnné $-z$ budeme psát do levého políčka cenového řádku. Pro danou úlohu bude tedy mít simplexová tabulka tvar

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z = 0$	-3	2	0	-1	1	-4	-5
$x_1 = 4$	1	0	0	0	2	-4	2
$x_2 = 3$	0	1	0	0	-1	2	-4
$x_3 = 2$	0	0	1	0	0	2	2
$x_4 = 3$	0	0	0	1	1	-3	1

Výpočet relativních cen znamená dosazení za bazické proměnné do rovnice (2.15), což v simplexové tabulce provedeme tak, že vhodné násobky řádků tabulky přičteme k cenovému řádku, aby se ceny bazických proměnných anulovaly. (To můžeme udělat, protože řádky odpovídají rovnicím.) Dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z = 9$	0	0	0	0	10	-23	10
$x_1 = 4$	1	0	0	0	$2^\star$	-4	2
$x_2 = 3$	0	1	0	0	-1	2	-4
$x_3 = 2$	0	0	1	0	0	2	2
$x_4 = 3$	0	0	0	1	1	-3	1

Cenový řádek vlastně odpovídá rovnici

$$9 = -z + 10x_5 - 23x_6 + 10x_7,$$

která vznikla z rovnice (2.15) anulováním bazických proměnných. Protože hodnoty nebazických proměnných x_5, x_6, x_7 volíme 0, představuje číslo 9 hodnotu proměnné $-z$ pro danou bazi, jak to v simplexové tabulce vyznačujeme zápisem $-z = 9$.

Zaveďme nyní do baze proměnnou x_5. Protože její relativní cena je kladná, hodnota účelové funkce pro nové bazické řešení bude větší. Z baze vypustíme proměnnou x_1. Zároveň vypočteme i nové relativní ceny pro bazi $\mathcal{B}' = (x_2, \dots, x_5)$. Přitom s cenovým řádkem zacházíme stále jako s rovnicí. Protože proměnná $-z$ je jen v této rovnici, její koeficient 1 se přičítáním jiných rovnic nemění. Proto pro ni zvláštní sloupec nemusíme do tabulky zavádět.

Pivotující prvek jsme již v předchozí tabulce označili hvězdičkou. Dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z = -11$	-5	0	0	0	0	-3	0
$x_5 = 2$	1/2	0	0	0	1	-2	1
$x_2 = 5$	1/2	1	0	0	0	0	-3
$x_3 = 2$	0	0	1	0	0	2	2
$x_4 = 1$	-1/2	0	0	1	0	-1	0

Protože žádná relativní cena nebazické proměnné není již kladná, je nalezené řešení optimální. Stačí si totiž uvědomit, že nebazické proměnné vlastně představují volitelné parametry. Cenový řádek říká, že

$$-11 = -z - 5x_1 - x_6 + 0x_7.$$

Protože proměnné nemohou nabývat záporných hodnot, je největší možná hodnota účelové funkce z pro $x_1 = x_6 = x_7 = 0$, což odpovídá nalezenému bazickému řešení $x_1 = x_6 = x_7 = 0, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 1, x_5 = 2$, pro které je hodnota účelové funkce $z_{\max} = 11$.

Dříve než zformulujeme úvahy z předchozího příkladu obecně, podívejme se co se stane, jestliže některá nebazická proměnná má kladnou relativní cenu, ale nemůžeme ji do baze přidat, protože neexistuje žádný kladný koeficient ve sloupci u této proměnné. Uvažujme následující příklad.

Příklad 2.4.3

$$\begin{aligned} &\max(x_1 - x_2 + 3x_4) \\ &x_1 \quad + 3x_3 - x_4 = 2 \\ &x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ &x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Zřejmě $\mathcal{B} = (x_1, x_2)$ je baze a zapsáním do simplexové tabulky dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-z = 0$	1	-1	0	3
$x_1 = 2$	1	0	3	-1
$x_2 = 4$	0	1	-2	-3

Vypočtěme nejdříve relativní ceny, tím že anulujeme koeficienty u bazických proměnných. Dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4
$-z = 2$	0	0	-5	1
$x_1 = 2$	1	0	3	-1
$x_2 = 4$	0	1	-2	-3

Nyní proměnná x_4 má kladnou relativní cenu $\bar{c}_4 = 1$, ale tuto proměnnou nemůžeme do baze přidat, protože koeficienty $a_{14} = -1$ i $a_{24} = -3$ jsou záporné. V tomto případě je účelová funkce na množině přípustných řešení *shora neomezená* a úloha nemá konečné optimum. Volíme-li totiž hodnoty proměnné x_4 libovolně velké, např. $x_4 = K, K > 0$ a $x_3 = 0$, pak této volbě odpovídají přípustné hodnoty bazických proměnných $x_1 = 2 + K,\ x_2 = 4 + 3K$. Hodnota účelové funkce z pro toto přípustné řešení je $z = -2 + K$. Tedy účelová funkce nabývá na množině přípustných řešení libovolně velkých hodnot.

Definice 2.4.1 Uvažujme úlohu

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ i = 1, \dots m \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n. \end{gathered}$$

Nechť je dáno přípustné bazické řešení $\mathbf{x}^B$ této úlohy odpovídající bazi $\mathcal{B} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$. Označme $J = \{j : j \neq i_1, \ldots, i_m, \ j = 1, \ldots, n\}$, tj. J je množina indexů všech nebazických proměnných. Nechť vztahy

$$x_{i_k} = \bar{b}_k + \sum_{j \in J} \bar{a}_{kj} x_j, \ k = 1, \ldots, m \tag{2.16}$$

vyjadřují hodnoty bazických proměnných v závislosti na hodnotách nebazických proměnných. *Relativní cena* $\bar{c}_j$ *nebazické proměnné* $x_j, j \in J$, *vzhledem k bazi* $\mathcal{B}$ je koeficient u této proměnné po dosazení vztahů (2.16) za všechny bazické proměnné do funkčního předpisu účelové funkce z. Tedy relativní ceny jsou koeficienty u nebazických proměnných při vyjádření hodnot účelové funkce jako funkce nebazických proměnných. Formálně zapsáno

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \bar{z} + \sum_{j \in J} \bar{c}_j x_j.$$

Přitom číslo $\bar{z}$ představuje hodnotu účelové funkce z pro bazické řešení $\mathbf{x}^B$.

Věta 2.4.2 *Uvažujme situaci z předchozí definice. Potom:*
a) Jestliže pro relativní ceny $\bar{c}_j$ *všech nebazických proměnných* $x_j, \ j \in J$ *platí podmínka* $\bar{c}_j \leq 0$*, pak bazické řešení* $\mathbf{x}^B$ *je optimální.*
b) Jestliže existuje nebazická proměnná x_j *taková, že* $\bar{c}_j > 0$ *a přitom* $\bar{a}_{kj} \leq 0$ *pro všechna* $k = 1, \ldots, m$*, je účelová funkce* z *na množině přípustných řešení shora neomezená.*

■

Poznámka 2.4.2 Případ b) předchozí věty v simplexové tabulce znamená, že v ní existuje sloupec odpovídající nebazické proměnné x_j s relativní cenou $\bar{c}_j > 0$ a přitom žádné jiné číslo v tomto sloupci není kladné. V simplexové tabulce jsou totiž vztahy (2.16) vyjádřeny ve tvaru

$$\bar{b}_k = x_{i_k} - \sum_{j \in J} \bar{a}_{kj} x_j.$$

Poznámka 2.4.3 Relativní ceny můžeme samozřejmě naprosto analogicky zavést i pro hledání minima, tedy pro úlohu

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Potom ke snížení hodnoty účelové funkce při přechodu od jednoho bazického řešení k druhému dojde tehdy, zavedeme-li do baze proměnnou jejíž relativní cena je záporná. Stejně pro tuto úlohu zůstává v platnosti i Věta 2.4.2 nahradíme-li v ní všechny nerovnosti pro relativní ceny $\bar{c}_j$ nerovnostmi opačnými. To přesně odpovídá tomu, že hledat $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ je ekvivalentní s hledáním $\min -\mathbf{c}^\top \mathbf{x}$, a tedy změně znamének u všech cen včetně relativních.

Popišme nyní simplexovou metodu jako algoritmus, tj. jako postup rozepsaný do jednotlivých kroků. Uvažujme stále Úlohu (2.8). Předpokládejme, že známe bazi $\mathcal{B}$ a bazické řešení $\mathbf{x}^B$ této úlohy.

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Algoritmus 2.4.1 (Simplexová metoda)
1. Nastává-li pro $\mathbf{x}^B$ jedna z možností Věty 2.4.2 algoritmus končí. Nalezené řešení je optimální nebo úloha nemá omezené optimum. V opačném případě:
2. Zvol nebazickou proměnnou x_k takovou, že $\bar{c}_k > 0$.
3. Změň bazi $\mathcal{B}$ tak, že se do baze přidá proměnná x_k a vypustí proměnná x_i, která je určena podle pravidla z Věty 2.4.1.
4. Pro tuto novou bazi vypočítej nové bazické řešení a relativní ceny nebazických proměnných.
5. Pokračuj bodem 1.

Poznámka 2.4.4 Chceme-li ukázat, že předchozí algoritmus po konečném počtu kroků, tj. po několikerém opakování bodů 1. - 5., skončí, stačí ukázat, že baze, které algoritmus postupně sestrojuje budou vždy *různé*, protože bazí pro danou úlohu je jen konečný počet. Jsou-li bazická řešení postupně sestrojovaná Algoritmem 2.4.1 nedegenerovaná, pak hodnota účelové funkce se zřejmě stále zvyšuje, a tedy nemůžeme sestrojit bazi, kterou jsme již jednou měli. Je-li ale řešení degenerované, může zůstat hodnota účelové funkce stejná a mohlo by se stát, že bychom po několika krocích získali bazi, kterou jsme již jednou sestrojili. Říkáme, že došlo k *zacyklení* algoritmu. Aby toto nenastalo, je třeba dodat další podrobnější pravidla pro výběr proměnné, kterou do baze přidáme a kterou z baze vypustíme. Takových pravidel je celá řada. Nejjednodušší je následující pravidlo, které navrhl R.G. Bland v roce 1977 a kterému se někdy říká pravidlo nejmenších indexů.

Věta 2.4.3 *Volíme-li v bodě 2. Algoritmu 2.4.1 ze všech možných proměnných x_k tu s nejmenším indexem k a v bodě 3. ze všech možných proměnných x_i tu s nejmenším indexem i, pak k zacyklení nedojde a algoritmus skončí i v případě degenerovaných řešení po konečném počtu kroků.*

■

I když počet kroků simplexového algoritmu může být někdy značně velký, ukazuje se, že pro praktické úlohy je tento algoritmus naprosto vyhovující.

Abychom si mohli ilustrovat postup simplexové metody na příkladech, je třeba si říci, jak najít první přípustné bazické řešení dané úlohy, o kterém jsme při formulaci Algoritmu 2.4.1 předpokládali, že je dáno. Pro obecnou úlohu lineárního programování si to ukážeme v následujícím odstavci. V některých případech toto přípustné bazické řešení však známe okamžitě. Takový případ popisuje následující věta.

Věta 2.4.4 *Nechť je dána úloha v kanonickém tvaru*

$$\begin{gathered}\max \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, \dots, m\\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n\end{gathered}$$

s proměnnými $x_1, \dots, x_n$ a taková, že $b_i \ge 0$ pro každé $i = 1, \dots, m$.

Zaveďme m doplňkových proměnných $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ a uvažujme úlohu ve standardním tvaru

$$\begin{gathered}\max \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, \dots, m\\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n+m\end{gathered}$$

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk), ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

s proměnnými $x_1, \dots, x_{n+m}$.

Potom $x_j = 0$ *pro* $j = 1, \dots, n$ *a* $x_{n+i} = b_i$ *pro* $i = 1, \dots, m$ *je přípustné bazické řešení uvažované úlohy ve standardním tvaru odpovídající bazi* $\mathcal{B} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ *tvořené právě doplňkovými proměnnými. Přitom ceny* c_j *nebazických proměnných jsou zároveň relativní ceny těchto proměnných vzhledem k bazi* $\mathcal{B}$.

■

Příklad 2.4.4 Simplexovou metodou vyřešíme úlohu

$$\begin{aligned} &\max(-x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ &x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ &x_2 \le 2 \\ &x_3 \le 3 \\ &3x_1 + x_3 \le 6 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Řešení: Tuto úlohu jsme již řešili v Příkladu 2.2.3 tak, že jsme probrali všechny vrcholy polyedru P přípustných řešení.

Převeďme tuto úlohu podle Věty 2.4.4 na úlohu ve standardním tvaru. Dostaneme

$$\begin{aligned} &\max(-x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ &x_2 + x_5 = 2 \\ &x_3 + x_6 = 3 \\ &3x_1 + x_3 + x_7 = 6 \\ &x_1, \dots, x_7 \ge 0. \end{aligned}$$

Protože bazická řešení této úlohy odpovídají vrcholům polyedru P přípustných řešení původní úlohy, budeme si postup výpočtu ilustrovat na polyedru P, který je nakreslen na Obr. 2.2.

Podle Věty 2.4.4 je $\mathcal{B} = (x_4, \dots, x_7)$ baze, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ a $x_4 = 4, x_5 = 2, x_6 = 3$, $x_7 = 6$ odpovídající přípustné bazické řešení s hodnotou účelové funkce $z = 0$. Tomuto řešení odpovídá vrchol $(0, 0, 0)$ polyedru P se stejnou hodnotou účelové funkce. Zápisem do simplexové tabulky dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z = 0$	-1	2	3	0	0	0	0
$x_4 = 4$	1	1	1	1	0	0	0
$x_5 = 2$	0	$1^\star$	0	0	1	0	0
$x_6 = 3$	0	0	1	0	0	1	0
$x_7 = 6$	3	0	1	0	0	0	1

Protože relativní ceny jsou kladné u proměnných x_2 a x_3 můžeme jednu z těchto proměnných do baze přidat. Zvolme např. x_2. Potom podle pravidla z Věty 2.4.1 vypustíme z baze proměnnou x_5. Pivotem je tedy prvek označený hvězdičkou v předchozí tabulce. Nyní vypočteme nové bazické řešení a relativní ceny pro novou bazi $\mathcal{B} = (x_4, x_2, x_6, x_7)$ tak, že vhodné násobky řádku, který obsahuje pivot, přičteme k ostatním řádkům včetně cenového. Dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z = -4$	-1	0	3	0	-2	0	0
$x_4 = 2$	1	0	$1^\star$	1	-1	0	0
$x_2 = 2$	0	1	0	0	1	0	0
$x_6 = 3$	0	0	1	0	0	1	0
$x_7 = 6$	3	0	1	0	0	0	1

Získali jsme nové bazické řešení $x_1 = x_3 = x_5 = 0, x_2 = 2, x_4 = 2, x_6 = 3, x_7 = 6$. Tomuto řešení odpovídá vrchol $(0, 2, 0)$ polyedru P. Hodnota účelové funkce je $z = 4$.

Jestliže chceme dále zvětšit hodnotu účelové funkce , je jediná možnost přidat do baze proměnnou x_3. Vypustit pak musíme proměnnou x_4. Dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z = -10$	-4	0	0	-3	1	0	0
$x_3 = 2$	1	0	1	1	-1	0	0
$x_2 = 2$	0	1	0	0	1	0	0
$x_6 = 1$	-1	0	0	-1	$1^\star$	1	0
$x_7 = 4$	2	0	0	-1	1	0	1

Bazickému řešení určenému touto tabulkou odpovídá vrchol $(0, 2, 2)$ polyedru P. Hodnota účelové funkce je $z = 10$.

Nyní přidáme do baze proměnnou x_5 a vypustíme proměnnou x_6. Dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-z = -11$	-3	0	0	-2	0	-1	0
$x_3 = 3$	0	0	1	0	0	1	0
$x_2 = 1$	1	1	0	1	0	-1	0
$x_5 = 1$	-1	0	0	-1	1	1	0
$x_7 = 3$	3	0	0	0	0	-1	1

Protože již žádná relativní cena není kladná, je nalezené bazické řešení $x_1 = x_4 = x_6 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_5 = 1, x_7 = 3$ optimální a hodnota účelové funkce je $z_{\max} = 11$. Tomuto řešení odpovídá vrchol $(0, 1, 3)$ polyedru P, což odpovídá řešení nalezenému v Příkladě 2.2.3.

Ukažme si ještě dva příklady. V těch již budeme postupovat stručněji.

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Příklad 2.4.5 Určete

$$\begin{aligned}
&\max(2x_1 + 3x_2 - x_3)\\
&x_1 + x_2 - x_3 \le 0\\
&x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 0\\
&2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

Řešení: Přidáním doplňkových proměnných dostaneme úlohu

$$\begin{aligned}
&\max(2x_1 + 3x_2 - x_3)\\
&x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\\
&x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_5 = 0\\
&2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_6 = 4\\
&x_1, \dots, x_6 \ge 0.
\end{aligned}$$

Přidané doplňkové proměnné tvoří bazi a simplexová tabulka má tvar

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z = 0$	2	3	-1	0	0	0
$x_4 = 0$	$1^\star$	1	-1	1	0	0
$x_5 = 0$	1	2	-3	0	1	0
$x_6 = 4$	2	1	-2	0	0	1

Všimněme si, že bazické řešení určené touto tabulkou je degenerované. Kladné relativní ceny jsou u proměnných x_1 a x_2. Podle pravidla nejmenších indexů přidáme do baze proměnnou x_1. V tomto případě je možno z baze vypustit proměnnou x_4 nebo x_5, a podle pravidla nejmenších indexů tedy z baze vypustíme proměnnou x_4. Dostaneme

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z = 0$	0	1	1	-2	0	0
$x_1 = 0$	1	1	-1	1	0	0
$x_5 = 0$	0	1	-2	-1	1	0
$x_6 = 4$	0	-1	0	-2	0	1

Protože ve sloupci u proměnné x_3 je relativní cena kladná a žádné jiné číslo v tomto sloupci není kladné, nemá tato a tedy i původní úloha omezené optimum. Skutečně, volíme-li $x_3 = K > 0$ a $x_1 = K,\ x_2 = 0$, dostáváme přípustné řešení původní úlohy s hodnotou účelové funkce $z = K$.

Poznamenejme ještě, že v tomto příkladě by k zacyklení nedošlo, ani kdybychom nepostupovali podle pravidla nejmenších indexů.

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Příklad 2.4.6 Určete

$$\begin{aligned} &\min(2x_1 - 3x_2 + 2x_3)\\ &3x_1 \;- x_2 + 2x_3 \le 7\\ &-2x_1 + 3x_2 \qquad\quad \le 15\\ &-4x_1 + 3x_2 + 9x_3 \le 9\\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Řešení: Úlohu převedeme přidáním doplňkových proměnných na standardní tvar. Dostaneme

$$\begin{aligned} &\min(2x_1 - 3x_2 + 2x_3)\\ &3x_1 \;- x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 7\\ &-2x_1 + 3x_2 \qquad\quad + x_5 \quad = 15\\ &-4x_1 + 3x_2 + 9x_3 \quad + x_6 = 9\\ &x_1, \dots, x_6 \ge 0. \end{aligned}$$

Tuto úlohu řešme simplexovou metodou:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z = 0$	2	-3	2	0	0	0
$x_4 = 7$	3	-1	2	1	0	0
$x_5 = 15$	-2	3	0	0	1	0
$x_6 = 9$	-4	$3^\star$	9	0	0	1

Protože hledáme minimální hodnotu účelové funkce přidáme do baze proměnnou se zápornou relativní cenou tedy proměnnou x_2. Z baze vypustíme proměnnou x_6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z = 9$	-2	0	11	0	0	1
$x_4 = 10$	5/3	0	5	1	0	1/3
$x_5 = 6$	$2^\star$	0	-9	0	1	-1
$x_2 = 3$	-4/3	1	3	0	0	1/3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-z = 15$	0	0	2	0	1	0
$x_4 = 5$	0	0	25/2	1	-5/6	7/6
$x_1 = 3$	1	0	-9/2	0	1/2	-1/2
$x_2 = 7$	0	1	-3	0	2/3	-1/3

Optimální řešení je tedy $x_3 = x_5 = x_6 = 0, x_1 = 3, x_2 = 7, x_4 = 5$ pro které je hodnota účelové funkce $z_{\min} = -15$. Původní úloha má optimum pro $x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = 0$ se stejnou hodnotou účelové funkce.

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Cvičení:

Simplexovou metodou řešte následující úlohy

1. Znovu Příklad 2.4.4, ale do první baze přidejte proměnnou x_3 místo x_2.

2.
$$\begin{aligned}\max(3x_1 + 2x_2 + 4x_3)\\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4\\ 2x_1 + x_3 \le 5\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 7\\ x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}\max(5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4)\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5\\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 3\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\max(2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4)\\ -3x_1 - x_2 + 2x_4 \le 16\\ -x_2 - 3x_3 + x_4 \le 0\\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}\min(x_1 - 3x_2 + 2x_3)\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7\\ -2x_1 + 4x_2 \le 12\\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10\\ x_1, x_2, x_3 \ge 0.\end{aligned}$$

2.5 Dvě fáze simplexové metody

V tomto odstavci si ukážeme, jak najít přípustné bazické řešení úlohy ve standardním tvaru, pokud tato úloha vůbec nějaké přípustné řešení má, nebo zjistit, že daná úloha nemá žádné přípustné řešení.

Uvažujme úlohu ve standardním tvaru, tedy úlohu

$$\left.\begin{array}{c}\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\dots,m\\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n.\end{array}\right\} \tag{2.17}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b_i \ge 0,\ i = 1,\dots,m$, protože v opačném případě můžeme vynásobit příslušnou rovnici číslem -1. Nalezení přípustného bazického řešení této úlohy (pokud existuje) spočívá v následujícím postupu:

Místo úlohy (2.17) budeme řešit jinou úlohu, která vznikne z předchozí úlohy tak, že do každé rovnice $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ přidáme další, tzv. *umělou* proměnnou $y_i,\ y_i \geq 0,\ i = 1,\dots,m$. Tím vzniknou rovnice tvaru

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i,\ i = 1,\dots,m.$$

Přitom budeme hledat minimum účelové funkce

$$z = y_1 + y_2 + \cdots + y_m.$$

Tedy budeme řešit úlohu

$$\left.\begin{array}{c} \min \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i = b_i,\ i = 1,\dots,m \\ x_j \geq 0, y_i \geq 0\ j = 1,\dots,n,\ i = 1,\dots,m. \end{array}\right\} \tag{2.18}$$

Vztah mezi řešením úlohy (2.18) a existencí přípustného řešení úlohy (2.17) popisuje následující věta.

Věta 2.5.1 *Úloha (2.17) má přípustné řešení právě tehdy, když minimální hodnota účelové funkce úlohy (2.18) je* $z_{\min} = 0$. *V tomto případě musí být hodnoty všech umělých proměnných rovny 0, tj.* $y_i = 0$ *pro* $i = 1,\dots,m$.

Důkaz: Má-li úloha (2.17) přípustné řešení, pak tyto hodnoty proměnných $x_j,\ j = 1,\dots,n$ a hodnoty $y_i = 0,\ i = 1,\dots,m$, tvoří přípustné řešení úlohy (2.18) s hodnotou účelové funkce $z = 0$. Protože všechna y_i splňují podmínku $y_i \geq 0$, menší hodnotu již účelová funkce úlohy (2.18) nabývat nemůže.

Naopak, je-li dáno nějaké optimální řešení úlohy (2.18) takové, že $z_{\min} = 0$, pak nutně $y_i = 0$ pro $i = 1,\dots,m$ a hodnoty proměnných $x_j,\ j = 1,\dots,n$ dávají přípustné řešení úlohy (2.17).

■

Poznámka 2.5.1 Při řešení úlohy (2.17) postupujeme následovně. Řešíme nejprve úlohu (2.18) simplexovým algoritmem, kdy $y_i = b_i,\ i = 1,\dots,m$ a $x_j = 0,\ j = 1,\dots,n$ je přípustné bazické řešení této úlohy odpovídající bazi $\mathcal{B} = (y_1,\dots,y_m)$. Řešení této úlohy se říká *1.fáze* simplexové metody. Zjistíme-li, že pro optimum úlohy (2.18) platí $z_{\min} > 0$ nemá úloha (2.17) žádné přípustné řešení. Je-li naopak $z_{\min} = 0$, a tedy $y_i = 0$ pro $i = 1,\dots,m$, získáme z konečné simplexové tabulky při řešení této úlohy přípustné bazické řešení úlohy (2.17). Dále pak řešíme úlohu (2.17) simplexovým algoritmem, kdy začneme s nalezeným přípustným bazickým řešením. Této části pak říkáme *2.fáze* simplexové metody.

Protože obecnou úlohu umíme převést na standardní tvar, umíme nyní již řešit obecnou úlohu lineárního programování. Ukažme si výše popsaný postup na příkladech.

Příklad 2.5.1 Řešme úlohu

$$\begin{gathered}\min(4x_2 + 5x_3)\\ x_1 \;-x_2 \;+x_3 \geq 1\\ -4x_1 + 2x_2 \;+x_3 \geq 2\\ x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{gathered}$$

Řešení: Pomocí doplňkových proměnných převedeme danou úlohu na standardní tvar. Dostaneme úlohu

$$\left.\begin{gathered}\min(4x_2 + 5x_3)\\ x_1 \;-x_2 \;+x_3 - x_4 \quad = 1\\ -4x_1 + 2x_2 \;+x_3 \quad - x_5 = 2\\ x_1, \dots, x_5 \geq 0.\end{gathered}\right\} \tag{2.19}$$

Nyní zavedeme dvě umělé proměnné y_1 a y_2 a budeme řešit úlohu

$$\begin{gathered}\min(y_1 + y_2)\\ x_1 \;-x_2 \;+x_3 - x_4 \quad +y_1 \quad = 1\\ -4x_1 + 2x_2 \;+x_3 \quad - x_5 \quad +y_2 = 2\\ x_1, \dots, x_5 \geq 0,\; y_1, y_2 \geq 0.\end{gathered}$$

Protože $x_1 = \ldots = x_5 = 0$ a $y_1 = 1, y_2 = 2$ je přípustné bazické řešení této úlohy, můžeme ji přímo řešit simplexovým algoritmem.

1.fáze:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
$-z = 0$	0	0	0	0	0	1	1
$y_1 = 1$	1	-1	1	-1	0	1	0
$y_2 = 2$	-4	2	1	0	-1	0	1

Nejprve musíme vypočítat relativní ceny nebazických proměnných a dále řešíme úlohu simplexovým algoritmem.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
$-z = -3$	3	-1	-2	1	1	0	0
$y_1 = 1$	1	-1	$1^\star$	-1	0	1	0
$y_2 = 2$	-4	2	1	0	-1	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
$-z = -1$	5	-3	0	-1	1	2	0
$x_3 = 1$	1	-1	1	-1	0	1	0
$y_2 = 1$	-5	3	0	$1^\star$	-1	-1	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2
$-z = 0$	0	0	0	0	0	1	1
$x_3 = 2$	-4	2	1	0	-1	0	1
$x_4 = 1$	-5	3	0	1	-1	-1	1

Část poslední tabulky bez sloupců u umělých proměnných y_1, y_2 a bez cenového řádku představuje přípustné bazické řešení $x_1 = x_2 = x_5 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1$ úlohy (2.19).

2.fáze:
Nyní budeme řešit úlohu (2.19). Začneme s nalezeným přípustným bazickým řešením.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z = 0$	0	4	5	0	0
$x_3 = 2$	-4	2	1	0	-1
$x_4 = 1$	-5	3	0	1	-1

Opět nejprve vypočítáme relativní ceny nebazických proměnných.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z = -10$	20	-6	0	0	5
$x_3 = 2$	-4	2	1	0	-1
$x_4 = 1$	-5	$3^\star$	0	1	-1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z = -8$	10	0	0	2	3
$x_3 = 4/3$	-2/3	0	1	-2/3	-1/3
$x_2 = 1/3$	-5/3	1	0	1/3	-1/3

Optimální řešení úlohy (2.19) je $x_1 = x_4 = x_5 = 0, x_2 = 1/3, x_3 = 4/3$, kdy $z_{\min} = 8$. tedy optimální řešení původní úlohy je $x_1 = 0, x_2 = 1/3, x_3 = 4/3$ se stejnou hodnotou účelové funkce.

Příklad 2.5.2 Řešme úlohu

$$\begin{aligned} \max(x_1 + 2x_2 + x_3) \\ x_1 + 2x_2 \ + x_3 &\geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \qquad &\geq 1 \\ -2x_1 \ + x_2 \ - x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Řešení: Podobně jako v předchozím příkladě po přidání doplňkových a umělých proměnných budeme řešit nejprve úlohu

$$\begin{array}{c} \min(y_1 + y_2 + y_3) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + y_1 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_5 + y_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_6 + y_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{array}$$

simplexovou metodou.

1.fáze:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
$-z = 0$	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$y_1 = 1$	1	2	1	-1	0	0	1	0	0
$y_2 = 1$	1	-2	0	0	-1	0	0	1	0
$y_3 = 1$	-2	1	-1	0	0	-1	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
$-z = -3$	0	-1	0	1	1	1	0	0	0
$y_1 = 1$	1	$2^\star$	1	-1	0	0	1	0	0
$y_2 = 1$	1	-2	0	0	-1	0	0	1	0
$y_3 = 1$	-2	1	-1	0	0	-1	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3
$-z = -5/2$	1/2	0	1/2	1/2	1	1	1/2	0	0
$x_2 = 1/2$	1/2	1	1/2	-1/2	0	0	1/2	0	0
$y_2 = 2$	2	0	1	-1	-1	0	1	1	0
$y_3 = 1/2$	-5/2	0	-3/2	1/2	0	-1	-1/2	0	1

Poslední tabulka již dává optimální řešení. Protože $z_{\min} > 0$, nemá původní úloha přípustné řešení.

Protože zaváděním umělých a doplňkových proměnných se celkový počet proměnných značně zvyšuje, je výhodné, zejména při ručním počítání, zavádět umělé proměnné pouze tehdy, je-li to nezbytně nutné.

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Příklad 2.5.3 Řešme úlohu

$$\begin{aligned} &\max(x_1 + 2x_2 + x_3)\\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6\\ &-x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq -2\\ &x_1 \;+ x_2 \;+ x_3 = 3\\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Řešení: Nejprve druhou nerovnost vynásobíme číslem -1 a přidáme dvě doplňkové proměnné. Tím převedeme úlohu na standardní tvar. Dostaneme

$$\begin{aligned} &\max(x_1 + 2x_2 + x_3)\\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \quad = 6\\ &x_1 - 2x_2 + 3x_3 \quad + x_5 = 2\\ &x_1 \;+ x_2 \;+ x_3 \qquad\quad = 3\\ &x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Nyní stačí zavést jednu umělou proměnnou y_1 do třetí rovnice, protože bazické řešení odpovídající bazi $\mathcal{B} = (x_4, x_5, y_1)$ bude zřejmě přípustné. Řešíme tedy úlohu

$$\begin{aligned} &\min(y_1)\\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad = 6\\ &x_1 - 2x_2 + 3x_3 \quad + x_5 \quad = 2\\ &x_1 \;+ x_2 \;+ x_3 \qquad + y_1 = 3\\ &x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

1.fáze:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1
$-z = 0$	0	0	0	0	0	1
$x_4 = 6$	1	2	3	1	0	0
$x_5 = 2$	1	-2	3	0	1	0
$y_1 = 3$	1	1	1	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1
$-z = -3$	-1	-1	-1	0	0	0
$x_4 = 6$	1	2	3	1	0	0
$x_5 = 2$	1	-2	3	0	1	0
$y_1 = 3$	1	$1^\star$	1	0	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1
$-z = 0$	0	0	0	0	0	1
$x_4 = 0$	-1	0	1	1	0	-2
$x_5 = 8$	3	0	5	0	1	2
$x_2 = 3$	1	1	1	0	0	1

2.fáze:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z = 0$	1	2	1	0	0
$x_4 = 0$	-1	0	1	1	0
$x_5 = 8$	3	0	5	0	1
$x_2 = 3$	1	1	1	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z = -6$	-1	0	-1	0	0
$x_4 = 0$	-1	0	1	1	0
$x_5 = 8$	3	0	5	0	1
$x_2 = 3$	1	1	1	0	0

Optimální řešení původní úlohy je tedy $x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 3$ s hodnotou účelové funkce $z_{\max} = 6$.

Cvičení: Následující úlohy řešte simplexovou metodou:

1.
$$\begin{array}{c}\max(x_1 + 2x_2)\\ \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & \geq 4\\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 8\\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 6 \end{array}\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.\end{array}$$

2.
$$\begin{array}{c}\max(2x_1 - 3x_2 + x_3)\\ \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = 4\\ 2x_1 & & +3x_3 & +x_4 & = 9\\ 5x_1 & +6x_2 & & -2x_4 & = 20 \end{array}\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.\end{array}$$

3.
$$\begin{array}{c}\min(14x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4)\\ \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & & +x_3 & & \geq 4\\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & \geq 16\\ 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & \geq 9 \end{array}\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.\end{array}$$

4.
$$\begin{array}{c}\max(5x_1 + x_2)\\ \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 7\\ -x_1 & & -5x_3 & +8x_4 & = -2 \end{array}\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.\end{array}$$

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace.* 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

2.6 Dualita v lineárním programování

Teorie duality je jedním z nejzajímavějších rysů lineárního programování, který má i důležité ekonomické souvislosti. Základní idea duality spočívá v tom, že každé tzv. *primární* úloze lineárního programování se přiřadí jiná tzv. *duální* úloha. Přitom tyto úlohy jsou tak úzce spojeny, že v okamžiku, kdy je vyřešena jedna z úloh, je obvykle vyřešena i druhá úloha.

Zaveďme nejprve duální úlohu pro úlohu v kanonickém tvaru.

Definice 2.6.1 Uvažujme *primární úlohu* v kanonickém tvaru, tj. úlohu

$$\left.\begin{aligned} \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Duální úloha k této úloze je úloha

$$\left.\begin{aligned} \min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ A^\top \mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Zřejmě, je-li v předchozí definici matice A typu (m, n), je nutně $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$. Dále, pro primární úlohu je vektor neznámých $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ a pro duální úlohu je vektor neznámých $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$.

Ilustrujme si Definici 2.6.1 na příkladě.

Příklad 2.6.1 Uvažujme úlohu

$$\begin{gathered} \max(4x_1 + 5x_2 + 2x_3) \\ 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 \le 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{gathered}$$

Potom duální úloha k této úloze je úloha

$$\begin{gathered} \min(6y_1 + 10y_2) \\ 3y_1 + \ y_2 \ge 4 \\ 2y_1 + 3y_2 \ge 5 \\ y_1 + 2y_2 \ge 2 \\ y_1, y_2 \ge 0. \end{gathered}$$

Všimněme si, že každé proměnné duální úlohy odpovídá jedna podmínka kladená na proměnné primární úlohy a každé proměnné primární úlohy odpovídá jedna podmínka kladená na proměnné duální úlohy. Dále hledání maxima v primární úloze odpovídá hledání minima v duální úloze.

Toto platí i obecně pro duální úlohu k obecné úloze lineárního programování. Navíc podmínkám ve tvaru nerovností $\le$ primární úlohy odpovídají nezáporné proměnné duální úlohy a podmínkám ve tvaru rovností primární úlohy odpovídají neomezené (co do znaménka) proměnné duální úlohy.Naopak podmínkám ve tvaru nerovností $\ge$ duální úlohy odpovídají

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

nezáporné proměnné primární úlohy a podmínkám ve tvaru rovností duální úlohy neomezené (co do znaménka) proměnné primární úlohy. Souhrnně jsou tato pravidla uvedena v následující tabulce

primární úloha	duální úloha
$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, \ldots, s$	$y_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, s$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = s+1, \ldots, m$	y_i -neomezené, $i = s+1, \ldots, m$
$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, r$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1, \ldots, r$
x_j -neomezené, $j = r+1, \ldots, n$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j,\ j = r+1, \ldots, n$

Z této tabulky plyne, že duální úloha k duální úloze je původní primární úloha. Je tedy jedno, kterou úlohu označujeme za primární a kterou za duální, a mluvíme obvykle spíše o *dvojici duálních úloh.*

Uveďme nyní některé věty o duálních úlohách. Věty budeme formulovat pouze pro dvojici duálních úloh z Definice 2.6.1, i když platí i pro obecnou dvojici duálních úloh.

Věta 2.6.1 (Slabá věta o dualitě) *Nechť $\bar{\mathbf{x}}$ a $\bar{\mathbf{y}}$ jsou přípustná řešení primární a duální úlohy z Definice 2.6.1. Potom*

$$\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}^\top \bar{\mathbf{y}}.$$

Důkaz: Protože $\bar{\mathbf{x}}$ i $\bar{\mathbf{y}}$ jsou vektory s nezápornými souřadnicemi plyne z podmínky $A\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}$ vztah $\bar{\mathbf{y}}^\top A\bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{y}}^\top \mathbf{b}$ a z podmínky $A^\top \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{c}$ vztah $\bar{\mathbf{x}}^\top A^\top \bar{\mathbf{y}} \geq \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{c}$. Protože $\bar{\mathbf{y}}^\top A\bar{\mathbf{x}}$ je číslo, platí

$$\bar{\mathbf{y}}^\top A\bar{\mathbf{x}} = \left(\bar{\mathbf{y}}^\top A\bar{\mathbf{x}}\right)^\top = \bar{\mathbf{x}}^\top A^\top \bar{\mathbf{y}}.$$

Celkem tedy

$$\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{c} \leq \bar{\mathbf{x}}^\top A^\top \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}^\top A\bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{y}}^\top \mathbf{b} = \mathbf{b}^\top \bar{\mathbf{y}}.$$

■

Z Věty 2.6.1 okamžitě plyne následující důležitý důsledek.

Věta 2.6.2 *Nechť $\bar{\mathbf{x}}$ a $\bar{\mathbf{y}}$ jsou přípustná řešení primární a duální úlohy z Definice 2.6.1. Jestliže $\mathbf{c}^\top \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^\top \bar{\mathbf{y}}$, jsou $\bar{\mathbf{x}}$ a $\bar{\mathbf{y}}$ optimální řešení těchto úloh.*

Důkaz: Z Věty 2.6.1 plyne, že větší hodnoty než $\mathbf{b}^\top\bar{\mathbf{y}}$ nemůže účelová funkce primární úlohy nabývat pro žádný přípustný vektor $\bar{\mathbf{x}}$. Analogicky totéž platí i pro duální úlohu.

■

Ilustrujme si Věty 2.6.1 a 2.6.2 na úloze z Příkladu 2.6.1: Zde vektory $\bar{\mathbf{x}}$ a $\bar{\mathbf{y}}$, kde $\bar{\mathbf{x}}^\top = (0, 3, 0)$ a $\bar{\mathbf{y}}^\top = (\frac{5}{2}, 0)$, jsou přípustná řešení primární a duální úlohy . Protože hodnoty účelových funkcí primární a duální úlohy jsou pro tato $\bar{\mathbf{x}}$ a $\bar{\mathbf{y}}$ stejné, jsou tato řešení optimální. Ověřte!

To, že hodnoty účelových funkcí primární a duální úlohy v Příkladu 2.6.1 jsou stejné, není náhodné, jak ukazuje následující věta.

Věta 2.6.3 (Silná věta o dualitě) *a) Má-li jedna z dvojice duálních úloh konečné optimum, má konečné optimum i druhá úloha a tyto optimální hodnoty jsou stejné.*

b) Je-li jedna z dvojice duálních úloh neomezená, nemá druhá úloha žádné přípustné řešení.

Důkaz: Zde dokážeme pouze část b). (Důkaz části a) je diskutován v poznámce 2.6.3.) Podle Věty 2.6.1 je $\mathbf{c}^\top\bar{\mathbf{x}} \le \mathbf{b}^\top\bar{\mathbf{y}}$ pro každé dvě přípustná řešení $\bar{\mathbf{x}}$ a $\bar{\mathbf{y}}$ primární a duální úlohy. Nabývá-li tedy např. účelová funkce $\mathbf{c}^\top\bar{\mathbf{x}}$ primární úlohy neomezeně velkých hodnot, nemůže mít duální úloha žádné přípustné řešení.

■

Poznámka 2.6.1 Z Věty 2.6.3 plyne, že pro řešení dvojice duálních úloh mohou nastat pouze následující 3 případy:
1. Obě úlohy mají stejné konečné optimum.
2. Jedna úloha je neomezená a druhá nemá žádné přípustné řešení.
3. Ani jedna z úloh nemá žádné přípustné řešení.

Každý z případů uvedených v předchozí poznámce však již může nastat. Příkladem dvojice duálních úloh, která obě mají konečné optimum je např. dvojice z Příkladu 2.6.1. Příkladem dvojice úloh, z nichž jedna je neomezená a druhá nemá žádné přípustné řešení, je např. dvojice:

$$\begin{array}{cc}
\max(x_1 + 2x_2) & \min(-y_1) \\
x_1 + 3x_2 \le -1 & y_1 \ge 1 \\
x_1, x_2 \ge 0 & 3y_1 \ge 2 \\
 & y_1 \ge 0.
\end{array}$$

Konečně příkladem dvojice duálních úloh, z nichž ani jedna nemá přípustné řešení, je dvojice:

$$\begin{array}{cc}
\max(x_1 + x_2) & \min(-y_1 + 2y_2) \\
x_1 \le -1 & y_1 + y_2 \ge 1 \\
x_1 - x_2 \le 2 & -y_2 \ge 1 \\
x_1, x_2 \ge 0 & y_1, y_2 \ge 0.
\end{array}$$

Poznámka 2.6.2 Z vět o dualitě také plyne, že z hlediska složitosti je stejně obtížné hledat optimální řešení úlohy lineárního programování jako poznat, zda vůbec nějaké přípustné řešení takové úlohy existuje. Z tohoto důvodu tedy není vůbec překvapivé, že 1.fáze Simplexové metody k nalezení přípustného řešení využívá hledání minima jiné částečně pozměněné úlohy.

Místo řešení úlohy

$$\left.\begin{array}{r} \max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\ , \end{array}\right\} \tag{2.22}$$

můžeme totiž hledat přípustné řešení úlohy

$$\left.\begin{array}{r} A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ A^\top \mathbf{y} \ge \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \ge \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \\ \mathbf{x},\ \mathbf{y} \ge \mathbf{0}\ . \end{array}\right\} \tag{2.23}$$

Pak úloha (2.22) má konečné optimum právě tehdy, když úloha (2.23) má nějaké přípustné řešení. Navíc, je-li dvojice $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ nějaké přípustné řešení úlohy (2.23), je podle vět 2.6.1 a 2.6.2 $\bar{\mathbf{x}}$ optimální řešení úlohy (2.22) a $\bar{\mathbf{y}}$ optimální řešení duální úlohy.

Možná nebude příliš překvapivé, že při řešení primární úlohy Simplexovou metodou můžeme z konečné Simplexové tabulky poznat i řešení duální úlohy.

Věta 2.6.4 *Uvažujme primární úlohu (2.20) z Definice 2.6.1 převedenou na standardní úlohu přidáním m doplňkových proměnných $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$. Nechť v konečné simplexové tabulce pro všechny relativní ceny $\bar{c}_j$ platí $\bar{c}_j \le 0$, pro $j = 1, \dots, n+m$. Pak optimální řešení duální úlohy (2.21) je dáno vztahy*

$$y_j = -\bar{c}_{n+j},\ \ j = 1, \dots, m.$$

Důkaz: Pro jednoduchost předpokládejme $\mathbf{b} \ge \mathbf{0}$. Pak počáteční simplexová tabulka pro řešení úlohy (2.20) má tvar

	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	$\dots$	x_{n+m}
$-z = 0$	c_1	c_2	$\dots$	c_n	0	$\dots$	0
$x_{n+1} = b_1$	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	$\dots$	0
$x_{n+2} = b_2$	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$x_{n+m} = b_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{2n}	0	$\dots$	1

Dále předpokládejme, že cenový řádek konečné simplexové tabulky, kdy simplexový algoritmus našel konečné optimum, má tvar

$-z = -d$	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$	$\dots$	$\bar{c}_n$	$\bar{c}_{n+1}$	$\dots$	$\bar{c}_{n+m}$

(2.24)

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Tedy $\bar{c}_j \le 0$ pro $j = 1, \dots, n+m$ a maximální hodnota účelové funkce primární úlohy je $z_{\max} = d$.

Pro pochopení důkazu je podstatné si uvědomit, že cenový řádek (2.24) konečné simplexové tabulky vznikl přičtením vhodných násobků posledních m-řádků počáteční simplexové tabulky k jejímu cenovému řádku, tedy přičtením nějaké lineární kombinace těchto řádků k cenovému řádku. Z tvaru řádku (2.24) nutně plyne, že koeficienty této kombinace jsou po řadě čísla

$$\bar{c}_{n+1}, \dots, \bar{c}_{n+m} .$$

Tedy

$$-d = \bar{c}_{n+1} b_1 + \bar{c}_{n+2} b_2 + \cdots + \bar{c}_{n+m} b_m$$

a pro $j = 1, \dots, n$ je

$$0 \ge \bar{c}_j = c_j + a_{1j}\bar{c}_{n+1} + a_{2j}\bar{c}_{n+2} + \cdots + a_{mj}\bar{c}_{n+m} .$$

Označíme-li $y_i = -\bar{c}_{n+i}$ pro $i = 1, \dots, m$ dostáváme

$$d = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m , \quad c_j \le a_{1j} y_1 + \cdots + a_{mj} y_m \ \text{ pro } \ j = 1, \dots, n$$

a dále zřejmě $y_i \ge 0$ pro $i = 1, \dots, m$.

Tedy $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^\top$ je přípustné řešení duální úlohy (2.21) s hodnotou účelové funkce $z = \mathbf{b}^\top \mathbf{y} = d$, tudíž její optimální řešení.

■

Ilustrujme si předchozí větu na Příkladu 2.6.1. K úloze

$$\begin{aligned} &\max(4x_1 + 5x_2 + 2x_3) \\ &3x_1 + 2x_2 + \ x_3 \le 6 \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10 \\ &x_1, x_2, x_3 \ge 0, \end{aligned}$$

přidáme dvě doplňkové proměnné x_4, x_5 a budeme řešit úlohu

$$\begin{aligned} &\max(4x_1 + 5x_2 + 2x_3) \\ &3x_1 + 2x_2 + \ x_3 + x_4 \quad = 6 \\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \quad + x_5 = 10 \\ &x_1, \dots, x_5 \ge 0, \end{aligned}$$

Postupný výpočet zapsaný do Simplexové tabulky má tvar

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z = 0$	4	5	2	0	0
$x_4 = 6$	3	$2^\star$	1	1	0
$x_5 = 10$	1	3	2	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$-z = -15$	$-7/2$	0	$-1/2$	$-5/2$	0
$x_2 = 3$	$3/2$	1	$1/2$	$1/2$	0
$x_5 = 1$	$-7/2$	0	$1/2$	$-3/2$	1

Turzík D.: *Matematika III: základy optimalizace*. 3rd ed. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 1999 (2006 dotisk). ISBN 80-7080-363-0
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Relativní ceny u doplňkových proměnných x_4, x_5 v poslední tabulce pak určují optimální hodnoty řešení duální úlohy $y_1 = 5/2$ a $y_2 = 0$.

Poznámka 2.6.3 Z věty 2.6.4 a jejího důkazu již okamžitě plyne i část a) věty 2.6.3. K úplnosti důkazu by ovšem bylo ještě třeba ukázat, že simplexový algoritmus skončí po konečném počtu kroků, tedy větu 2.4.3.

Poznámka 2.6.4 Známe-li přípustné bazické řešení duální úlohy a přitom neznáme žádné přípustné řešení primární úlohy, může být jednodušší, než řešit primární úlohu dvoufázovou simplexovou metodou, vyřešit nejprve duální úlohu a z konečné simplexové tabulky pak určit řešení primární úlohy. Tomuto postupu se říká *duální simplexová metoda*. Ukažme si tento postup na příkladě.

Příklad 2.6.2 Řešme úlohu

$$\begin{aligned} &\min(4x_2 + 5x_3) \\ &x_1 \;\; - x_2 + x_3 \geq 1 \\ &-4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Tuto úlohu jsme již řešili v předchozím odstavci v Příkladě 2.5.1, kde jsme zavedli umělé proměnné a provedli dvě fáze simplexové metody.

Duální úloha k úloze (2.25) má tvar:

$$\begin{aligned} &\max(y_1 + 2y_2) \\ &y_1 - 4y_2 \leq 0 \\ &-y_1 + 2y_2 \leq 4 \\ &y_1 + \;\; y_2 \leq 5 \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a po přidání doplňkových proměnných y_3, y_4 a y_5 úlohu

$$\begin{aligned} &\max(y_1 + 2y_2) \\ &y_1 - 4y_2 + y_3 \qquad = 0 \\ &-y_1 + 2y_2 \quad + y_4 \quad = 4 \\ &y_1 + \;\; y_2 \qquad + y_5 = 5 \\ &y_1, \ldots, y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Tato úloha má zřejmě přípustné bazické řešení s bazí y_3, y_4, y_5, kdy $y_3 = 0$, $y_4 = 4$ a $y_5 = 5$. Při použití simplexové metody pak dostáváme:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$-z = 0$	1	2	0	0	0
$y_3 = 0$	$1^\star$	-4	1	0	0
$y_4 = 4$	-1	2	0	1	0
$y_5 = 5$	1	1	0	0	1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$-z = 0$	0	6	-1	0	0
$y_1 = 0$	1	-4	1	0	0
$y_4 = 4$	0	-2	1	1	0
$y_5 = 5$	0	$5^\star$	-1	0	1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$-z = -6$	0	0	$1/5$	0	$-6/5$
$y_1 = 4$	1	0	$1/5$	0	$4/5$
$y_4 = 6$	0	0	$3/5^\star$	1	$2/5$
$y_2 = 1$	0	1	$-1/5$	0	$1/5$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$-z = -8$	0	0	0	$-1/3$	$-4/3$
$y_1 = 2$	1	0	0	$-1/3$	$2/3$
$y_3 = 10$	0	0	1	$5/3$	$2/3$
$y_2 = 3$	0	1	0	$1/3$	$1/3$

Odtud podle Věty 2.6.4 okamžitě dostáváme hodnoty optimálního řešení primární úlohy $x_1 = 0,\ x_2 = 1/3$ a $x_3 = 4/3$.

Na závěr tohoto odstavce si ještě ilustrujeme ekonomický význam duálních proměnných. Uvažujme Příklad 1.1.2. Pro zjednodušení výpočtu počítejme zásoby a množství výrobků ve stovkách jednotek. Úloha pak má tvar:

$$\begin{aligned} &\max(4x_1 + 5x_2)\\ &x_1 + 2x_2 \le 16\\ &x_1 + x_2 \le 9\\ &4x_1 + 3x_2 \le 33\\ &x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Tato úloha má optimální řešení pro $x_1 = 2,\ x_2 = 7$, kdy hodnota účelové funkce je $z = 43$. Duální úloha k této úloze je následující:

$$\begin{aligned} &\min(16y_1 + 9y_2 + 33y_3)\\ &y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 4\\ &2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 5\\ &y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Tato úloha má optimální řešení $y_1 = 1,\ y_2 = 3$ a $y_3 = 0$. (Ověřte!)

Uvažujme nyní situaci, kdy zásoby suroviny S_1 můžeme o 1 jednotku zvýšit, např. nákupem. Úloha pak bude mít tvar

$$
\begin{aligned}
&\max(4x_1 + 5x_2)\\
&x_1 + 2x_2 \le 17\\
&x_1 \ + x_2 \le 9\\
&4x_1 + 3x_2 \le 33\\
&x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Optimální řešení této úlohy bude $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{17}{2}$ a $x_3 = 0$, kdy hodnota účelové funkce je $z = 44$. Všimněme si, že hodnota zvětšení účelové funkce o 1 odpovídá optimální hodnotě duální proměnné y_1.

Podobně zvětšením zásob suroviny S_2 o 1, tj. z hodnoty 9 na 10, se zvýší hodnota optima účelové funkce o 3, což je hodnota duální proměnné y_2 v optimálním řešení duální úlohy. Zvětšením zásob suroviny S_3 o 1 z hodnoty 33 na 34 se hodnota optima nezmění a také hodnota duální proměnné y_3 v optimálním řešení je rovna 0.

Vidíme, že hodnoty duálních proměnných v optimálním řešení vyjadřují v jistém smyslu cenu surovin pro výrobu.

Cvičení:

1. Ověřte tvrzení Věty 2.6.1 pro nějaká přípustná řešení úlohy z Příkladu 2.6.1.

2. Napište duální úlohy k úlohám

a)
$$
\begin{aligned}
&\max(x_1 + x_2 - x_3)\\
&x_1 + 3x_2 - x_3 \le 1\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
&\min(2x_1 + x_2)\\
&x_1 + 2x_2 = 3\\
&x_1 - 3x_2 \ge 4\\
&x_1 \ge 0.
\end{aligned}
$$

3. Duální simplexovou metodou řešte úlohy

a)
$$
\begin{aligned}
&\min(6x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 3x_4)\\
&x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \ge 12\\
&-2x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 4\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 1\\
&x_1, \dots, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
&\min(3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4)\\
&x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \ge 6\\
&-x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3\\
&2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 \ge 5\\
&x_1, \dots, x_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

2.7 Celočíselné programování

Úlohy lineárního programování, kde kromě lineárních omezení na přípustná řešení vystupuje navíc podmínka celočíselnosti souřadnic přípustných řešení, nazýváme úlohami *celočíselného programování*. Takovou úlohou je např.:

Úloha 2.7.1

$$
\begin{aligned}
&\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}\\
&A\mathbf{x} \le \mathbf{b}\\
&\mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x}\ \text{celočíselný.}
\end{aligned}
$$