3 Analýza epidemiologického modelu s Allee efektem díky problémům s nalezením partnera u infekčních jedinců

Uvažujme populaci napadenou infekcí, ze které se nelze vyléčit. Vhodným základním popisem takové situace je SI model:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bN - \beta(N)\frac{SI}{N} - (d + d_1 N)S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(N)\frac{SI}{N} - (d + d_1 N)I - \alpha I\end{aligned} \tag{9}$$

kde S je množství náchylných jedinců v populaci, I je množství infekčních jedinců v populaci, a $N = S + I$ je celková velikost či hustota populace.

Tento model předpokládá, že náchylní a infekční jedinci se rozmnožují stejnou rychlostí. Nemusí to však být vždy reálný předpoklad. Infekční jedinci jsou často určitým způsobem znevýhodnění. My zde budeme předpokládat, že jejich znevýhodnění spočívá v nižší efektivitě nalezení si partnera, což může být například dáno jejich sníženými pohybovými schopnostmi nebo sníženou atraktivitou. Navíc budeme předpokládat, že je to znevýhodňuje do té míry, že při malých hustotách populace budou mít větší problémy než při větších hustotách, čili budou vystavení Allee efektu díky problémům s nalezením partnera. Model (9) proto upravíme následovně:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= bS + b\frac{N}{N+\theta}I - \beta(N)\frac{SI}{N} - (d + d_1 N)S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(N)\frac{SI}{N} - (d + d_1 N)I - \alpha I\end{aligned} \tag{10}$$

Právě člen $N/(N+\theta)$ je v tomto modelu modelem tohoto Allee efektu. V obou modelech budeme uvažovat tzv. 'mass action incidence', tedy $\beta(N) = \beta N$.

Úkolem studenta je:

1. Nastudovat známé řešení modelu (9).
2. Provést základní analýzu modelu (10) (ekvilibria a jejich lokální stabilita metodou linearizace).
3. Numericky simulovat řešení tohoto modelu.
4. Diskutovat výsledky pro různé hodnoty parametru θ, přičemž hodnota $\theta = 0$ odpovídá modelu (9).