Okruhy ke státní závěrečné zkoušce v bakalářském studijním programu Matematika pro vzdělávání na SŠ

Tyto okruhy jsou určeny pro studenty, kteří své studium zahájili v akademickém roce 2024/2025.

Student si losuje jednu otázku z okruhu A a jednu otázku z okruhu B. Některé kombinace vedoucí na podobná témata nebudou dovoleny (např. Matematika 1 okruh A otázka 9 a současn Matematika 2 okruh B otázka 12); v takovém případě si student znovu losuje otázku z jednoho z okruhů podle své volby.

Znalost jen jedné otázky z vylosované dvojice znamená neúspěch u zkoušky.

Výklad by měl student vždy vhodně doplnit nákresy a/nebo jednoduchými ilustračními příklady.

Matematika 1

Okruh A

1. Funkce: definice reálné funkce jedné reálné proměnné, graf funkce, definice a podmínky existence inverzní funkce, vztah grafu funkce a grafu inverzní funkce; demonstrace na studentem vybrané elementární funkci.

2. Limita funkce: vlastní limita ve vlastním bodě, jednostranné limity, vlastní limita v nevlastním bodě, nevlastní limita ve vlastním bodě; jednotlivé varianty student graficky demonstruje.

3. Spojitost funkce: definice, pravostranná a levostranná spojitost, odstranitelná nespojitost, neodstranitelná nespojitost, aritmentika spojitých funkcí, spojitost složené funkce, spojitost inverzní funkce.

4. Derivace funkce: definice, souvislost s tečnou ke grafu funkce, souvislost derivace a spojitosti (včetně důkazu), derivace součtu, rozdílu, součinu, podílu, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce.

5. Funkce rostoucí a klesající, souvislost první derivace s monotonií funkce, nutná podmínka pro extrém funkce. Funkce konvexní a konkávní, souvislost druhé derivace s konvexitou/konkavitou funkce, inflexní bod.

6. Lokální extrémy funkce jedné proměnné: definice, nutná a postačující podmínka pro lokální extrém pomocí první derivace funkce, postačující podmínka pro lokální extrém pomocí druhé derivace funkce.

7. Globální extrémy funkce jedné proměnné: definice, Weierstrassova věta o nabývání maxima a minima funkce, princip hledání globálních extrémů funkce.

8. Neurčitý integrál: primitivní funkce, neurčitý integrál, existence a jednoznačnost, linearita integrálu, princip metody per-partes a substituční metody.

9. Riemannův integrál: motivace, exaktní zavedení, postačující podmínka integrovatelnosti funkce, příklad neintegrovatelné funkce, Newtonova metoda integrace, délka části grafu funkce.

10. Nevlastní integrál: nevlastní integrál vlivem funkce, vlivem meze, integrální kriterium pro součet nekonečné řady.

11. Posloupnosti: definice pospoupnosti, konkrétní příklad posloupnosti, konvergence, Cauchy-Bolzanova podmínka, souvislost mezi limitou posloupnosti a supremem množiny, aritmetická a geometrická posloupnost.

Okruh B

1. Parciální derivace funkce více proměnných: definice, geometrický význam, souvislost parciální derivace a spojitosti funkce více proměnných.

2. Diferencovatelnost funkce více proměnných: tečná rovina, definice, postačující podmínky, příklad funkce nediferencovatelné v nějakém bodě, souvislost diferencovatelnosti a spojitosti funkce.

3. Směrová derivace funkce více proměnných: geometrický význam, definice, gradient funkce, souvislost směrové derivace a gradientu funkce.

4. Lokální extrémy funkcí více proměnných: definice, nutné a postačující podmínky pro jejich existenci.

5. Globální extrémy funkce více proměnných: definice, Weierstrassova věta o nabývání maxima a minima funkce, princip hledání globálních extrémů funkce.

6. Vázané extrémy funkce více proměnných: definice, přímá metoda, Lagrangeova metoda (nutná podmínka pro extrém).

7. Číselné řady: co je to součet řady, Bolzanova-Cauchyova podmínka, absolutní a neabsolutní konvergence řady, kritérium pro absolutní a neabsolutní konvergenci řady, příklad řady konvergující neabsolutně a nekonvergující absolutně.

8. Funkční posloupnosti: bodová a stejnoměrná konvergence, příklad posloupnosti konvergující bodově a nekonvergující stejnoměrně, postačující podmínky pro to, aby limita posloupnosti spojitých funkcí byla spojitá funkce, příklad posloupnosti spojitých funkcí, jejíž limta není spojitá funkce.

9. Funkční řady: bodová a stejnoměrná konvergence, příklad funkční řady konvergující bodově a nestejnoměrně, Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence, vlastnosti stejnoměrně konvergentních funkčních řad.

10. Mocninné řady: definice, obor konvergence mocninné řady a jeho určení, Taylorova řada.

11. Dvojný Riemannův integrál: motivace, exaktní zavedení, Fubiniova věta (princip, vícenásobný integrál, integrační oblasti), co je integrál "z jedničky" přes nějakou integrační oblast, princip substituční metody.

Matematika 2

Okruh A

1. Pojem grafu, význačné grafy (úplný graf, cyklus, cesta, úplný bipartitní graf), isomorfismus grafů, princip sudosti. Eulerovské grafy, charakterizace uzavřeného a otevřeného eulerovského tahu.

2. Množiny a relace na množině: definice množiny, kartézský součin množin, relace (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita), relace ekvivalence a rozklad množiny na třídy.

3. Matice: Definice matice, operace s maticemi, inverzní matice. Determinanty matic a regulární/singulární matice.

4. Soustavy rovnic: Elementární řádkové úpravy matic, hodnost matice, řešení soustav lineárních rovnic a Gaussova eliminační metoda, Frobeniova věta. Vektorové a afinní podprostory $\mathbb{R}^n$.

5. Algebraické struktury: Binární operace na množině, vlastnosti (asociativita, komutativita, existence jednotkového prvku a inverzních prvků). Algebraické struktury (grupoid, pologrupa, grupa, okruh, těleso). Algebraické struktury čísel.

6. Permutace: Permutace n-prvkové množiny, skládání permutací. Cykly a transpozice, rozklady permutací na nezávislé cykly a transpozice. Sudé a liché permutace.

7. Dělitelnost celých čísel: Věta o dělení se zbytkem. Největší společný dělitel dvou celých čísel, nesoudělnost. Euklidův algoritmus. Prvočísla, věta o rozkladu přirozeného čísla na prvočísla.

8. Polynomy nad číselnými obory: Polynomy a operace s nimi (sčítání, násobení), hodnota polynomu v bodě a Hornerovo schéma, jednoduché / násobné kořeny polynomů. Ireducibilní polynomy a rozklady polynomů nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

9. Vektory a souřadnice: Lineární kombinace vektorů, lineárně závislé a nezávislé systémy vektorů. Báze a dimenze vektorového (pod)prostoru, souřadnice vektoru v bázi. Ortogonální vektory, norma vektorů, odchylky vektorů.

10. Základy analytické geometrie: Souřadnicový popis afinních podprostorů (parametrický, neparametrický). Vzájemná poloha podprostorů (rovnoběžnost, různoběžnost, mimoběžnost). Kolmost podprostorů.

Okruh B

1. Stromy (definice a charakterizace), kostra grafu. Rovinné grafy, Eulerův vzorec, barevnost grafu, věta o čtyřech barvách.

2. Pravděpodobnost: Klasická, statistická a axiomatická pravděpodobnost. Podmíněná pravděpodobnost. Nezávislost jevů. Bayesův vzorec a jeho význam.

3. Náhodná veličina: Rozdělení pravděpodobnosti, distribuční funkce, střední hodnota, rozptyl. Příklady diskrétních a spojitých rozdělení.

4. Korelace a regrese: Korelace. Personův korelační koeficient. Vztah ke kauzalitě. Lineární regrese. Metoda nejmenších čtverců (princip a statistické předpoklady).

5. Testování statistických hypotéz: Princip testování (nulová hypotéza, testová charakteristika, hladina významnosti, kritický obor). Chyba 1. a 2. druhu. P-hodnota. Student může tyto pojmy vysvětlit na konkrétním testu, např. na testu o střední hodnotě.

6. Kongruence: Definice kongruence. Lineární kongruenční rovnice. Systémy kongruenčních rovnic. Využití Euklidova algoritmu a Bezoutovy rovnice k nalezení řešení.

7. Kolmé projekce: Kolmá projekce vektoru do podprostoru v Euklidovském vektorovém prostoru. Vzdálenost afinních podprostorů v Euklidovském bodovém prostoru, využití kolmé projekce k nalezení vzdálenosti. Odchylka přímky a podprostoru Euklidovského prostoru využitím kolmé projekce.

8. Jordanův kanonický tvar matic: Vlastní čísla a vlastní vektory matice, algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla. Řetízky a Jordanův kanonický tvar.

9. Geometrická zobrazení: Lineární zobrazení vektorových prostorů $\mathbb{R}^n$, jádro a obraz lineárního zobrazení. Základní afinity v rovině $\mathbb{R}^2$, základní shodnosti v rovině $\mathbb{R}^2$.

10. Kvadratické formy: Definice kvadratické formy a polární forma. Polární báze kvadratické formy a její existence. Klasifikace kvadratických forem nad $\mathbb{R}$ pomocí signatury a hodnosti.

11. Euklidovské prostory: Ortogonální a ortonormální báze vektorového prostoru. Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces. Ortogonální doplněk podprostoru v Euklidovském vektorovém prostoru, kolmost podprostorů.